

YUIMA によるレヴィ過程の応用例 デフォルト・破産確率とモンテカルロ法

清水 泰隆

早稲田大学 理工学術院

YUIMA チュートリアル/CREST
2018 年 12 月 2 日@東京大学

Part I

複合ポアソン過程と拡散近似

点過程：ポアソン過程 $Po(\lambda)$

- 点過程 (point process) : イベントの発生時刻の列 $T = (T_n)_{n=1,2,\dots}$

$$0 < T_n < T_{n+1}$$

ただし, $T_n = \infty$ ならば $T_{n+1} = \infty$ とする.

- (T に対する) 計数過程 (counting process) :

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}, \quad t \geq 0$$

定義 (ポアソン過程)

$W_n := T_{n+1} - T_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. W_1, W_2, \dots が IID で平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うとき:

$$W_n \sim \text{Exp}(1/\lambda) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

T に対する計数過程 $N = (N_t)_{t \geq 0}$ をポアソン過程 (Poisson process) といい

$$N \sim Po(\lambda)$$

と表す. 特に, $P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$.

複合過程 (compound process)

定義 (複合ポアソン過程)

$N \sim Po(\lambda)$ とし, $U_i (i = 1, 2, \dots)$ を分布 F に従う IID 列とする.

$$S_t := \sum_{i=1}^{N_t} U_i \quad (1)$$

と表される $S = (S_t)_{t \geq 0}$ を複合ポアソン過程 (compound Poisson process) といい

$$S \sim CP(\lambda, F)$$

と表す.

- 特に, $U_i \equiv 1$ ($F = \Delta_1$) とすると $S_t = N_t$:

$$CP(\lambda, \Delta_1) = Po(\lambda)$$

サンプルパスの性質

定理

$S \sim CP(\lambda, F)$ とし、分布 F は平均 μ 、分散 σ^2 を持つとする。このとき、

- (1) S は独立定常増分を持つ（レヴィ過程の一種）。
- (2) 平均と分散：

$$E[S_t] = \lambda\mu t, \quad \text{Var}(S_t) = \lambda(\mu^2 + \sigma^2)t$$

である。

- $\mathbb{E}[N_1] = \lambda$ より、 $[0, 1]$ 区間では平均的に λ 回のジャンプが起こる。
- 定常増分なので、長さ 1 の区間であればジャンプの平均回数は λ 。

複合ポアソン過程: `setPoisson` (→ p.2)

- 複合ポアソン過程の定義には `setPoisson` が用意されている.
- 以下は $CP(\lambda, N(\mu, \sigma))$ のモデル定義.

モデルの定義

```
mod.cp <- setPoisson(intensity = "lambda", # ポアソン過程の強度
                    df = list("dnorm(z,mu,sigma)") # Uの確率密度関数
                    )
```

サンプルング時点

```
Terminal <- 10
```

```
samp <- setSampling(Initial=0, Terminal=Terminal,
                   n=100*Terminal)
```

統計モデルの定義

```
cp <- setYuima(model = mod.cp, sampling = samp)
```

注意 (ジャンプを定数にしたいとき?; e.g., $CP(\lambda, \Delta_1)$)

```
mod.po <- setPoisson(intensity="lambda", df=list("dconst(z,1)"))
```

とするとポアソン過程 $N \sim Po(\lambda)$ になる.

複合ポアソン過程のパス

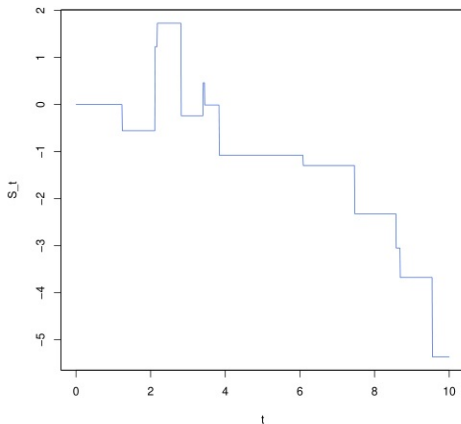


Figure: 複合ポアソン過程 $CP(1, N(0, 1))$ のサンプルパス

CP に対する中心極限定理

$$S_n(t) := \frac{S_{nt} - \lambda\mu nt}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

として $n \rightarrow \infty$ とする (“スケーリング”して長期観測: $[0, nt]$).

定理 (周辺分布の分布収束)

ある標準ブラウン運動 $B(t)$ が存在して, 任意の固定された $t \geq 0$ に対して,

$$S_n(t) \rightarrow^d \sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)} \cdot B(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Remark (確率過程としての分布収束)

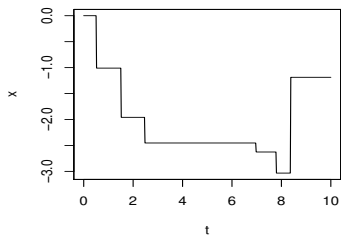
$$S_n \rightarrow^d \sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)} \cdot B \quad \text{in } D[0, \infty), \quad n \rightarrow \infty.$$

ただし, $D[0, \infty)$ は右連続・左極限をもつような $[0, \infty)$ 上のパス全体の空間.

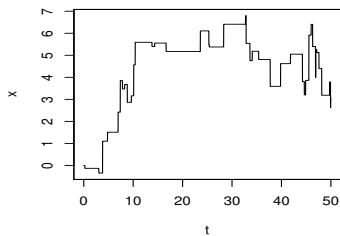
- 長期間の観測で適当なスケール変換 ($1/\sqrt{n}$) により, 複合ポアソン過程のような現象をブラウン運動としてモデリングすることができる.
- 複合ポアソン過程の**拡散近似 (diffusion approximation)**.

$n = 10, 50, 100, 500$ くらいで... (→ p.5)

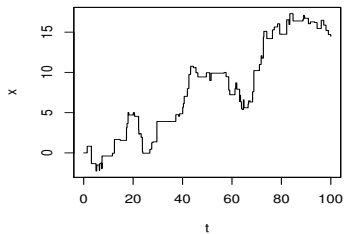
$n = 10$



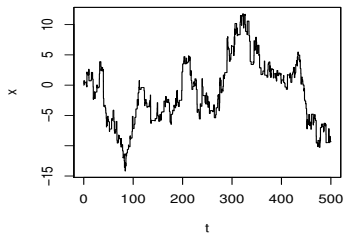
$n = 50$



$n = 100$



$n = 500$



Part II

デフォルト確率・破産確率

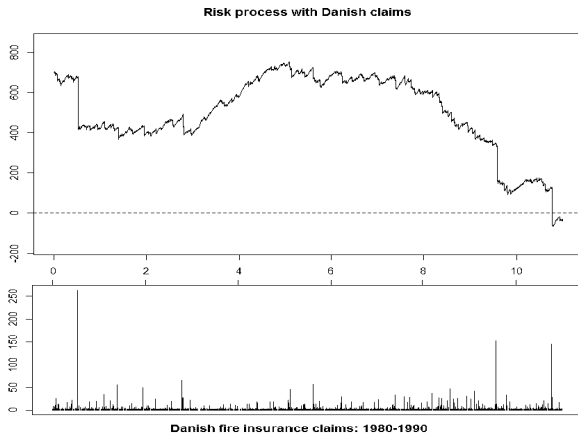


Figure:
$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

$x = 700, c = (1 + \theta)\hat{\lambda}\hat{\mu}, N \sim Po(\hat{\lambda}); \hat{\lambda} = 197, \hat{\mu} = 3.385.$

デフォルト・破産解析のリスクモデル

- ジャンプが負のレヴィ過程 (spectrally negative Lévy process):

$$X(t) = x + ct + \sigma B_t - S(t), \quad S \sim CP(\lambda, F) \quad (3)$$

(ジャンプが複合ポアソン型のレヴィ過程)

- c : ドリフト係数 (drift), σ : 拡散係数 (diffusion).
- 初期到達時刻:

$$\tau_d = \inf\{t > 0 : X_t < d\}$$

定義 (初期到達分布)

τ_d の分布関数

$$\psi_d(t) = P(\tau_d \leq t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

から決まる τ_d の分布を初期到達分布 (first passage distribution) という。

- 信用リスク解析では ψ_d をデフォルト確率という。
- 保険数理では $d = 0$ の場合を特に破産確率という。

純益条件 (Net Profit Condition, NPC)

定理

前項 (3) において $\theta = c - \mathbb{E}[S(t)]$ とおく。このとき、 $\theta (\neq 0) \in \mathbb{R}$ ならば、確率 1 で以下が成り立つ：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = \theta$$

したがって、特に以下が成り立つ：

- (i) $\theta > 0$ のとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty$;
- (ii) $\theta < 0$ のとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty$;
- (iii) $\theta = 0$ のとき、以下が成り立つ：

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty.$$

- この定理から

$$\theta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad P(\tau_d < \infty) = 1, \quad \forall d \in \mathbb{R}.$$

- 確実な破産 (デフォルト) を回避 $\Rightarrow \theta > 0$ (純益条件)

ドリフト付きブラウン運動のパス・シミュレーション (→ p.8)

ドリフト付きブラウン運動：

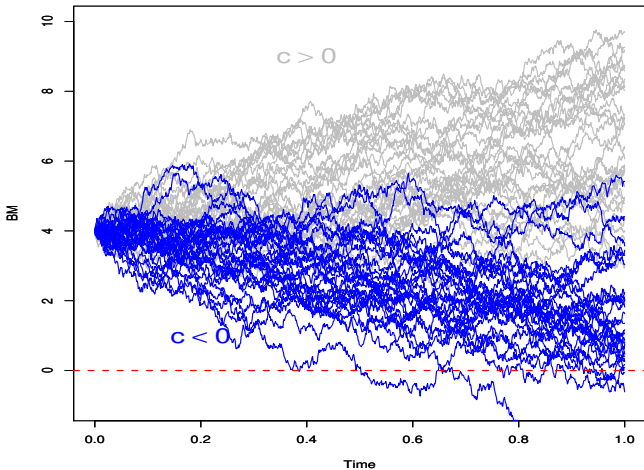
$$X_t = x + ct + \sigma B_t, \quad \theta = c > 0 \text{ (NPC)}$$

ドリフトの符号の違いによる破産頻度の比較

#ドリフト付きブラウン運動(DBM)のパス・シミュレータ

```
simulateDBM <- function(Time, x, c, sigma){
  dt <- diff(Time) #サンプリング幅
  Zt <- rnorm(length(dt), c*dt, sigma*sqrt(dt)) # DBMの増分
  DBt <- diffinv(Zt)
  return( x + DBt ) # 初期値xを追加してパスを生成
}
set.seed(123) # 乱数シード固定
Time <- seq(0, 1, by = 1/1000) # サンプリング時点
MC <- 30 # 繰り返し回数
result <- replicate(MC, simulateDBM(Time, x=4, c=3, sigma=2))
matplot(Time,result,type="l",lty=1,col="grey", xlab="Time",
         ylab="Drifted BM", ylim=c(-1,10))
par(new=T) # 図を重ね描き
# c=-3 についても同様にプロットする.
```

ドリフトの向きによるパスの違い



初期到達分布の解析解 (→ p.9)

定理

$c \in \mathbb{R}$, $x > d$, $\sigma \neq 0$ とする. このとき,

$$\psi_d(t) = 1 - \Phi\left(\frac{x-d+ct}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-2c(x-d)/\sigma^2} \Phi\left(\frac{-(x-d)+ct}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad t > 0.$$

ただし, Φ は標準正規分布の分布関数である.

破産確率のモンテカルロ計算

破産確率の解析解

```
psi <- function(t,x,c,sigma,d){  
  x1 <- (x-d+c*t)/sigma/sqrt(t); x2 <- (d-x+c*t)/sigma/sqrt(t)  
  return( 1 - pnorm(x1) + exp(-2*c*(x-d)/sigma^2)*pnorm(x2) )  
}  
( psi(t=1,x=4,c=3,sigma=2,d=0) ) # 解析解  
[1] 0.0009974172
```

x, c が大きく, σ が小さくなると ψ_d は小さくなる (レア・イベント)

モンテカルロ計算により比較： $t = 1, x = 4, c = -3, \sigma = 2$ (\rightarrow p.9)

```
### 破産確率のモンテカルロ計算
## 破産を検出するシミュレータ
ruin.indicator <- function(Time,x,c,sigma){
  bm <- simulateDBM(Time,x,c,sigma)
  ind <- length(bm[bm<0]) # DBMのパスで負値があるか探す
  if(ind > 0) return(1) # 破産(ind>0)していたら1の値を返す
  else return(0)
}
Time <- seq(0,1,by=1/10000)
# 注意 :by=1/1000くらいではパスが粗すぎてバイアスが出る
## モンテカルロ法による破産確率の近似計算
set.seed(123)
MC <- 1000 # 繰り返し回数
ruin.freq <- sum( replicate(MC,
  ruin.indicator(Time,x = 4, c = -3, sigma = 2))
) # 破産したパスの数
( ruin.prob <- ruin.freq/MC) # [0,1]での経験破産確率
[1] 0.403
( psi(1,4,-3,2,0) ) # 解析解
[1] 0.4023868
```

レア・イベントでは誤差が大きくなり収束は遅い

MC=100 回繰り返して平均をとったとする.

- $c = -3$ のとき : $\psi_0(1) = 0.4023$

⇒ 100 回中 40 回くらいは破産する.

仮に 45 回破産したとしても, 推定値は $45/100 = 0.45$

$$\text{相対誤差} = \frac{0.45 - 0.4023}{0.4023} = 0.118 \approx 12\% \text{程度}$$

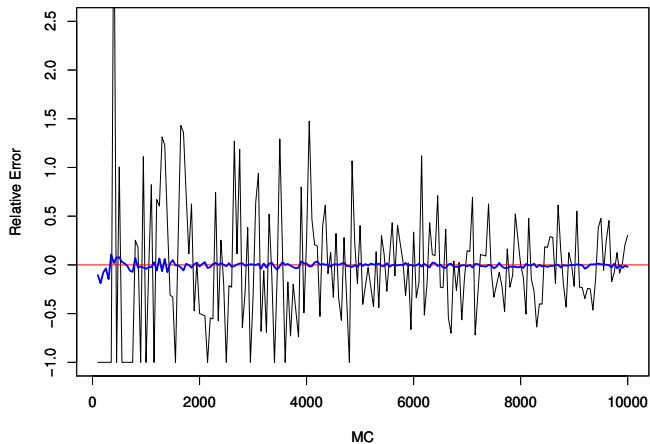
- $c = 3$ のとき : $\psi_0(1) = 0.0009974172$ (レア・イベント)

⇒ 1000 回中 1 回破産するかどうか.

仮に 100 回やって 1 回でも破産すると, 推定値は $1/100 = 0.01$

$$\text{相対誤差} = \frac{0.01 - 0.000997}{0.000997} = 9.03 \approx 900\%!!$$

黒線は $c = 3$, 青線は $c = -3$.



Part III

レア・イベントのための重点サンプリング

負のジャンプを持つリスクモデル

Example (複合ポアソン型のレヴィ過程)

$$X(t) = x + ct + \sigma B_t - S(t), \quad S \sim CP(\lambda, F) \quad (4)$$

ただし、 F は正值確率変数の分布とする.

- $\mu = \int_{\mathbb{R}} x F(dx) < \infty$ とする.
- NPC を仮定 : $c > \lambda\mu \Rightarrow P(\tau_0 < \infty) < 1$

$d = 0$ として、以下の破産確率を求めたい :

$$\psi_0(t) = \mathbb{P}(\tau_0 \leq t)$$

現実的には x や c はある程度大きく、破産は **レア・イベント** と考えられる。
⇒ 前節の例のように ψ_0 のモンテカルロ計算では膨大な MC が必要そう...

確率法則の変換

- 各 $t \geq 0$ に対して確率過程 $R = (R(t))_{t \geq 0}$ を以下で定める：

$$R(t) = x - X(t)$$

これを X のリスク過程 (risk process) という。

- P の P のエッシャー変換 (Essher transform):

$$P_t^{(r)}(d\omega) = \frac{e^{rR(t)}}{E[e^{rR(t)}]} P(d\omega)$$

定理 (エッシャー変換)

以下の r に関する方程式 (Lundberg 方程式) :

$$\log E[e^{-rR(1)}] = 0$$

が負の解 $r = -\gamma$ ($\gamma > 0$: 調整係数という) を持つとする。このとき、 P と同値な確率測度 P^* が存在して、

$$P^*(A) = P_t^{(\gamma)}(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

が成り立つ。

P^* の下での破産確率

定理

確率 P の下で (4) のようなレヴィ過程は P^* の下でもまたレヴィ過程であり、そのドリフト c_* 、拡散係数 σ_*^2 、強度 λ^* 、ジャンプ分布 F^* は以下を満たす：

$$c_* = c - \gamma\sigma^2, \quad \sigma_*^2 = \sigma^2, \quad \lambda^* F^*(dz) = \lambda e^{\gamma z} F(dz)$$

として与えられる。このとき、特に

$$P^*(\tau_d < \infty) = 1$$

であり、任意の $t \in (0, \infty]$ に対して、

$$\psi_d(t) = E^* \left[e^{\gamma X(\tau_d)} \mathbf{1}_{\{\tau_d \leq t\}} \right] e^{-\gamma(x-d)}, \quad x > d \quad (5)$$

が成り立つ。ただし、 E^* は P^* による期待値を表す。

シミュレーションでは、 P^* の下でパスを発生し、

$$E^* \left[e^{\gamma X(\tau_d)} \mathbf{1}_{\{\tau_d \leq t\}} \right]$$

をモンテカルロで計算すればよい！

具体例

Example (ドリフト付きブラウン運動)

この定理を $c > 0$ のドリフト付きブラウン運動：

$$X(t) = x + ct + \sigma B(t) \quad (\text{under } P)$$

に当てはめて解釈してみると、この場合の調整係数は $\gamma = 2c/\sigma^2$ であり、

$$c_* = -c, \quad \sigma_*^2 = \sigma^2$$

となってドリフトの向きが逆転する。つまり、確率法則 P^* の下では

$$X(t) = x - ct + \sigma B(t) \quad (\text{under } P^*)$$

となり、 $P^*(\tau_0 < \infty) = 1$ となっている。

Example (ドリフト付き複合ポアソン過程)

確率 P の下で $S \sim CP(\lambda, \text{Exp}(\mu^{-1}))$ となる複合ポアソン過程 S によって

$$X(t) = x + ct - S(t), \quad (\text{under } P)$$

を考える。純益条件 $c > \lambda\mu$ を満たすとする。このとき、調整係数は存在して

$$\gamma = 1/\mu - \lambda/c > 0$$

となることが分かる。したがって、 P^* の下で

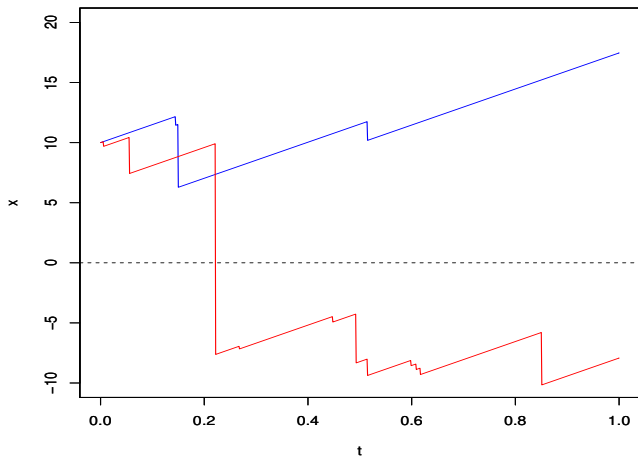
$$c_* = c, \quad \nu_*(dz) = \frac{c}{\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}z} \right) dz$$

となるから、 $S^* \sim CP\left(\frac{c}{\mu}, \text{Exp}\left(\frac{\lambda}{c}\right)\right)$ なる複合ポアソン過程によって

$$X(t) = x - ct - S^*(t), \quad \text{under } P^*$$

ドリフト付き複合 CP: setYuima (→ p.12-13)

```
### ドリフト付きの複合ポアソン過程 : 測度変換によるパスの変化
## 複合ポアソンモデルの定義
mod.cp <- setModel(drift = "c", jump.coeff = -1,
  measure.type = "CP", # ジャンプ測度をCPに指定
  measure = list(intensity = "lambda", list(df = "dexp(z,1/mu)"))
  # ジャンプ測度: 強度(intensity)とジャンプの密度関数(平均muの指数分布)に分けて指定
)
T <- 1 # 終端時点
samp <- setSampling(Initial = 0, Terminal = T,
  n = 1000*T # サンプリング時点数(初期時点は除く)
)
## 統計モデルの定義
dCP <- setYuima(model = mod.cp, # ドリフト付き複合ポアソンモデル
  sampling = samp # サンプリング時点
)
```

P と P^* によるパスの変化

重点サンプリング

以下, $d = 0$ とする.

$$\psi_0(t) = P(\tau_0 \leq t)$$

を計算する代わりに

$$\psi_0(t) = E^* \left[e^{\gamma X(\tau_0)} \mathbf{1}_{\{\tau_0 \leq t\}} \right] e^{-\gamma x} \quad (6)$$

を計算する!

破産の重点サンプリング

- P^* の下で N 本パスを発生させたとき, t までに B 本のパスが破産したとする. そのうち, $i (= 1, 2, \dots, B)$ 番目のパスの破産時刻を τ_*^i と書くと,

$$E^* \left[e^{\gamma X(\tau_0)} \mathbf{1}_{\{\tau_0 \leq t\}} \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^B e^{\gamma X(\tau_*^i)}$$

- P^* の下では $\{\tau_0 \leq t\}$ という事象が起こりやすいので, B はある程度大きくなると期待できる!(重点サンプリング).
- 早い収束が期待できる!

CP の場合 : $x_0 = 3, c = 60, \lambda = 3, \mu = 1$ (\rightarrow p.13-14)

Example ((再)ドリフト付き複合ポアソン過程)

確率 P の下で

$$X(t) = x + ct - S(t), \quad S \sim CP(\lambda, \text{Exp}(\mu^{-1}))$$

確率 P^* の下で

$$X(t) = x - ct - S^*(t), \quad S^* \sim CP\left(\frac{c}{\mu}, \text{Exp}\left(\frac{\lambda}{c}\right)\right)$$

このとき、以下の解析解が知られている :

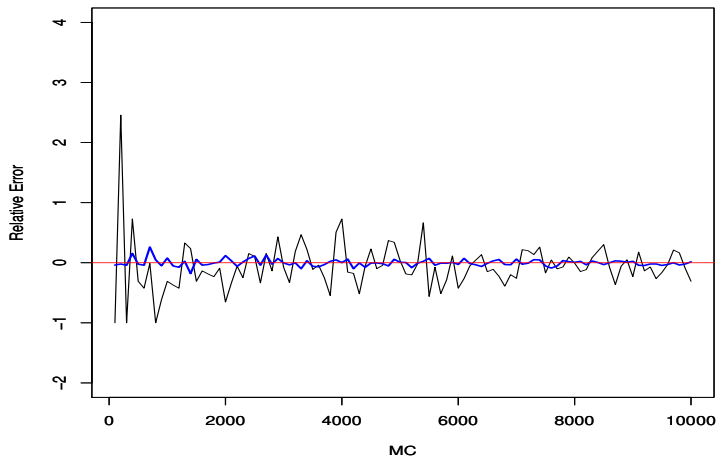
$$\psi_0(\infty) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{-\gamma x}$$

これと、“大きい” T に対する

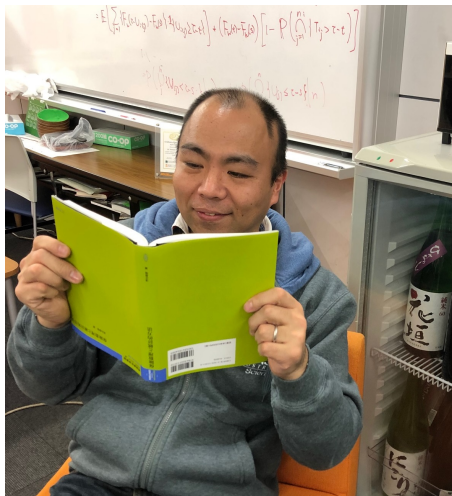
$$\psi_0(T) = E^* \left[e^{\gamma X(\tau_0)} \mathbf{1}_{\{\tau_0 \leq T\}} \right] e^{-\gamma x}$$

をと比較

通常のモンテカルロと重点サンプリングとの比較 (→ p.15【参考】)



清水泰隆 (2018) 「保険数理と統計的方法」 共立出版



Thank you for your attention!