

YUIMA によるレヴィ過程の応用例 デフォルト・破産確率とモンテカルロ法

清水 泰隆

早稲田大学 理工学術院 応用数理学科

概要

ここでは、レヴィ過程とそのシミュレーションを用いたいくつかの応用例を観察する。レヴィ過程は金融・保険における資産過程等のモデリングに広く用いられるが、特に、信用リスク解析や保険数理(リスク理論)ではその資産の性質や多くの実証研究などから負のジャンプを持つレヴィ過程が実際の現象に適合するとされる。ここでは、そのようなレヴィ過程の応用例としてデフォルト確率や破産確率の計算を取り上げ、YUIMA パッケージを用いたモンテカルロ計算が実行できるようになることを目標とする。

1 複合ポアソン過程の性質

1.1 定義

$N = (N_t)_{t \geq 0}$ を強度 $\lambda > 0$ のポアソン過程とし、 $U_i (i = 1, 2, \dots)$ はそれぞれ独立に同一分布 F に従う確率変数とする。このとき、

$$S_t := \sum_{i=1}^{N_t} U_i \quad (1.1)$$

と表される確率過程 $S = (S_t)_{t \geq 0}$ を複合ポアソン過程 (compound Poisson process) といい、

$$S \sim CP(\lambda, F)$$

と表すことにする。

定理 1. $S \sim CP(\lambda, F)$ とし、分布 F は平均 μ 、分散 σ^2 を持つとする。このとき、以下が成り立つ。

- (1) S は独立定常増分を持つ。
- (2) $E[S_t] = \lambda \mu t$, $Var(S_t) = \lambda(\mu^2 + \sigma^2)t$.
- (3) 各 $t \geq 0$ に対して、 S_t の特性関数 $\phi_{S_t}(u) = E[e^{iuS_t}]$ は以下で与えられる。

$$\phi_{S_t}(u) = \exp\left(\lambda t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) F(du)\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

注意 1. S のサンプルパスはジャンプを持つ階段型になり、長さ t の区間で観察すると平均 $E[N_t] = \lambda t$ 回程度のジャンプが起こる。例えば、図 1 の例では $[0, 10]$ の区間で $\lambda = 1$ なので平均 10 回程度のジャンプが起こると理解できるが、実際、シミュレーションによるパスは 12 回ジャンプしている。

特性関数の形からレヴィ測度は $\nu(dz) = \lambda F(z) dz$ となることが分かる。

```

### 複合ポアソン過程のパスシミュレーション
## モデルの定義
mod.cp <- setPoisson(intensity = "lambda", # 強度
                    df = list("dnorm(z,mu,sigma)") # Uの確率密度関数
)
## サンプル時点の定義
Terminal <- 10 # 終端時点
samp <- setSampling(Initial = 0, # 初期時点
                   Terminal = Terminal, # 終端時点
                   n = 100*Terminal # サンプル時点数
)
## 統計モデルの定義
cp <- setYuima(model = mod.cp, # 確率微分方程式モデル
              sampling = samp # サンプリング時点
)
## シミュレーションとサンプルパスの描画
set.seed(123)
param <- list(lambda = 1, mu = 0, sigma = 1) # パラメーターの値
# シミュレーションの実行
result <- simulate(cp, # 統計モデル
                  xinit = 0, # 初期値
                  true.parameter = param # パラメーターの値
)
plot(result, col = "royalblue", ylab = "S_t")

```

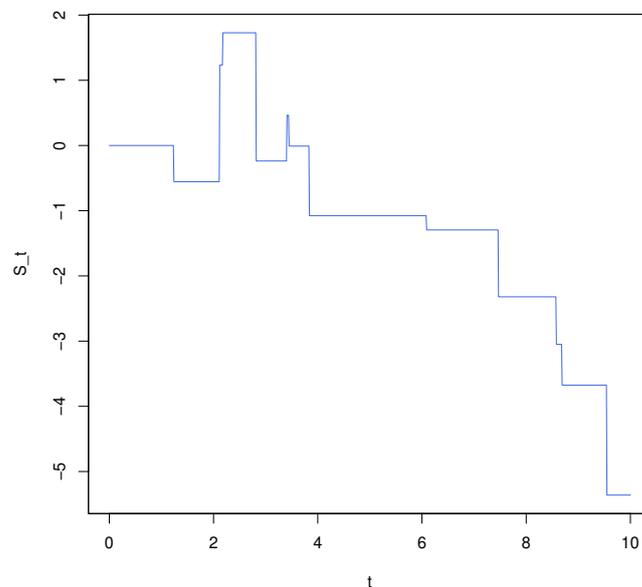


図 1: 複合ポアソン過程 $CP(1, N(0, 1))$ のサンプルパス.

1.2 複合ポアソン過程の拡散近似

$$S_n(t) := \frac{S_{nt} - \lambda \mu n t}{\sqrt{n}} \quad (1.2)$$

とおくと、中心極限定理の類似として、以下の収束が成り立つ。

定理 2. ある標準ブラウン運動 $B(t)$ が存在して、任意の固定された $t \geq 0$ に対して、

$$S_n(t) \rightarrow^d \sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)} \cdot B(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

証明. 任意の $t \geq 0$ に対して、

$$S_{nt} = [S_t - S_0] + [S_{2t} - S_t] + \cdots + [S_{nt} - S_{(n-1)t}] =: \sum_{k=1}^n \tilde{S}_k.$$

ただし、 $\tilde{S}_k = S_{kt} - S_{(k-1)t}$ のように書き直すと S の独立定常増分性により \tilde{S}_k , ($k = 1, \dots, n$) は IID 確率変数列であり、

$$E[\tilde{S}_k] = \lambda \mu t, \quad \text{Var}(\tilde{S}_k) = \lambda(\mu^2 + \sigma^2)t$$

が簡単な計算によって分かる。中心極限定理により、標準ブラウン運動が $B(1) \sim N(0, 1)$ であることに注意して

$$\frac{S_n(t)}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)t}} = \frac{\sum_{k=1}^n (\tilde{S}_k - \lambda \mu t)}{\sqrt{n} \sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)t}} \rightarrow^d B(1)$$

と書ける。ここで、 $B(t) =^d \sqrt{t} \cdot B(1)$ に注意して

$$\frac{S_n(t)}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}} \rightarrow^d B(t).$$

□

以下では n を大きくしながら定理 2 を確認してみよう。

```
### 複合ポアソン過程の周辺分布
## シミュレーターの作成
simulateXT <- function(smod, x0, param){
  out <- simulate(smod, xinit = x0, true.parameter = param)
  XT <- tail(get.zoo.data(out)[[1]], n = 1) # 最後の観測値を取り出す
  return(XT)
}

## サンプル時点の定義( t=1 で考える)
n <- 30 # 終端時点
samp <- setSampling(Initial = 0, # 初期時点
                    Terminal = n, # 終端時点
                    n = 10*n # サンプル時点数
)

## 統計モデルの定義
cp <- setYuima(model = mod.cp, # 確率微分方程式モデル
               sampling = samp # サンプリング時点
)

```

```

## パラメーターの設定
x0 <- 0 # 初期値
lambda <- 1 # 強度
mu <- 0 # Uの平均
sigma <- 1 # Uの標準偏差
param <- list(lambda = lambda, mu = mu, sigma = sigma)
## モンテカルロ・シミュレーションの実行
set.seed(123) # 乱数シードの固定
MC <- 1000 # シミュレーション回数
result <- replicate(MC, simulateXT(cp, x0, param)) # シミュレーション
## ヒストグラムの描画
Sn1 <- (result - lambda * mu * n)/sqrt(n) # 標準化した統計量の計算
hist(Sn1, freq = FALSE, breaks = 20,
     xlab = expression(S[n](1)),
     main = expression(paste("Histogram of ", S[n](1))))

## 理論分布の上書き
curve(dnorm(x, mu, sigma), add = TRUE, col = "red")

```

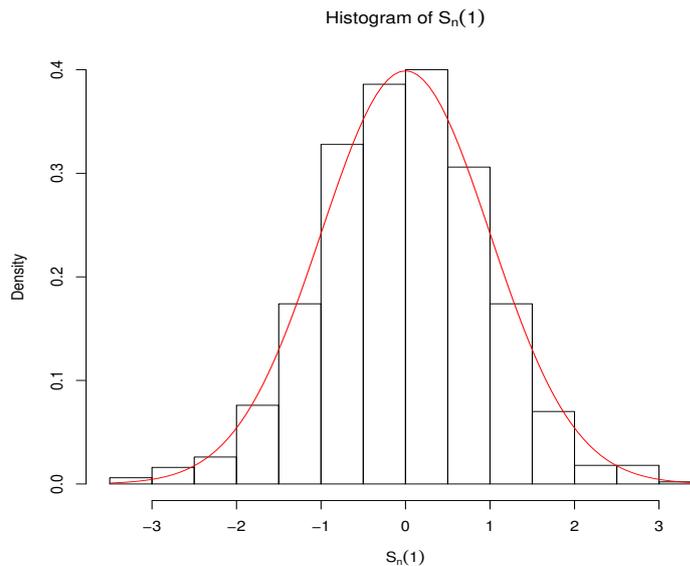


図 2: $S_{30}(1)$ の (周辺) 分布.

注意 2. 実は S_n は確率過程としてもブラウン運動に収束することが知られている:

$$S_n \rightarrow^d \sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)} \cdot B \quad \text{in } D[0, \infty), \quad n \rightarrow \infty.$$

ただし, $D[0, \infty)$ は右連続・左極限をもつような $[0, \infty)$ 上のパス全体の空間である (詳細は清水 [5]). このことは, 長期間の観測においてスケールを適切に $(1/\sqrt{n})$ で変換することにより, 複合ポアソン過程のような現象をブラウン運動としてモデリングすることができることを示唆するもので, これが複合ポアソン過程の拡散近似 (**diffusion approximation**) である. このような思想は金融や保険におけるモデリングにおいて重要である.

```

### 複合ポアソン過程の拡散近似
## パラメーターの設定
x0 <- 0 # 初期値
lambda <- 1 # 強度
mu <- 0 # Uの平均
sigma <- 1 # Uの標準偏差
param <- list(lambda = lambda, mu = mu, sigma = sigma)
## n を増やしながらパスをプロットしていく
set.seed(111) # 乱数シードの固定
ns <- c(100, 500, 1000, 5000) # 試すnたち
op <- par(mfrow = c(2,2)) # 描画領域を2x2に分割
for(n in ns){
  samp <- setSampling(Initial = 0, Terminal = n, n = 50*n)
  cp <- setYuima(model = mod.cp, sampling = samp)
  result <- simulate(cp, xinit = 0, true.parameter = param)
  plot(result, main = bquote(expression(n == .(n))))
}
par(op) # 描画設定をリセット

```

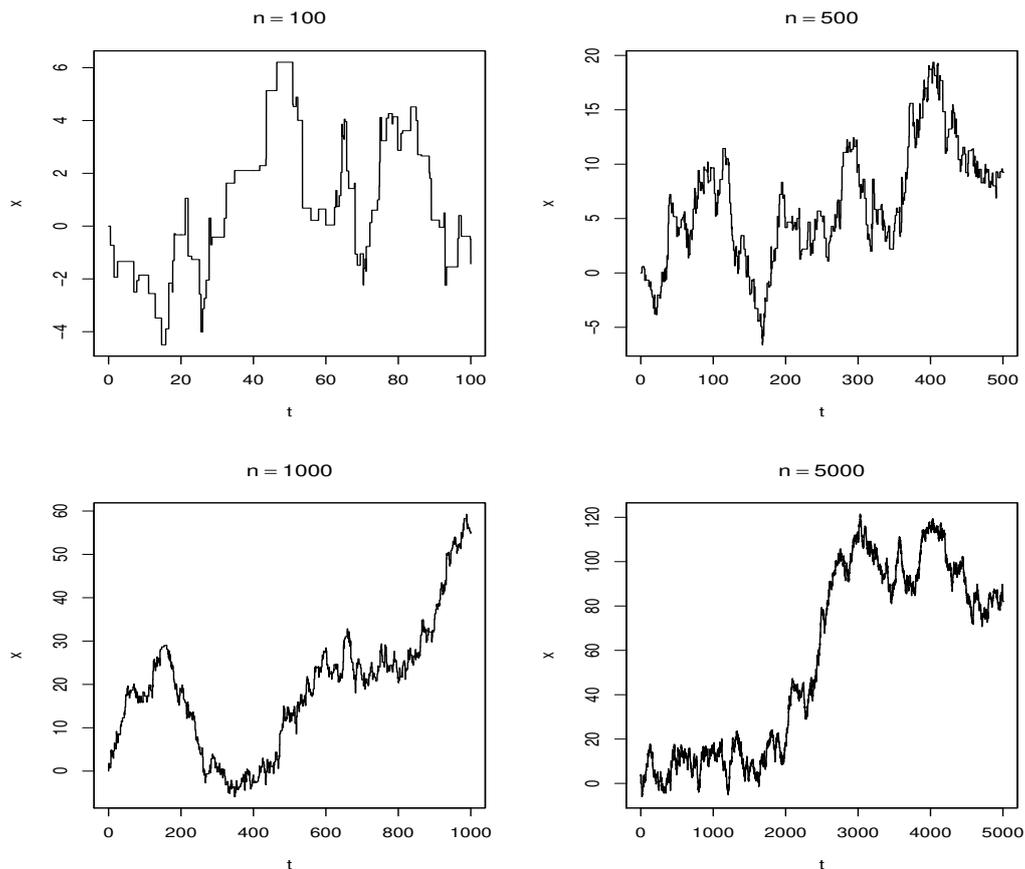


図 3: n による S_n のサンプルパスの変化.

2 デフォルト確率・破産確率

2.1 リスクモデルと初期到達分布

信用リスク解析では企業がデフォルトする確率を見積もる必要がある。このための手法は様々であるが、一つの手法として、企業価値 (例えば株価で代用) などに対する資産モデルが、ある一定の低水準レベルに到達する初期到達時刻 (**first passage time**) の分布として計算される (構造的アプローチ)。また、保険数理 (リスク理論) では保険サープラスのモデルが 0 レベルに到達する確率が計算されるので、これも構造的アプローチの一つである。

図 4 の下図は 1980–1990 年のデンマーク火災保険クレーム金額のデータ (これは R のパッケージに入っている: 下記【参考】を見よ) 上図がそれに対応する保険サープラス過程を描いたものである。

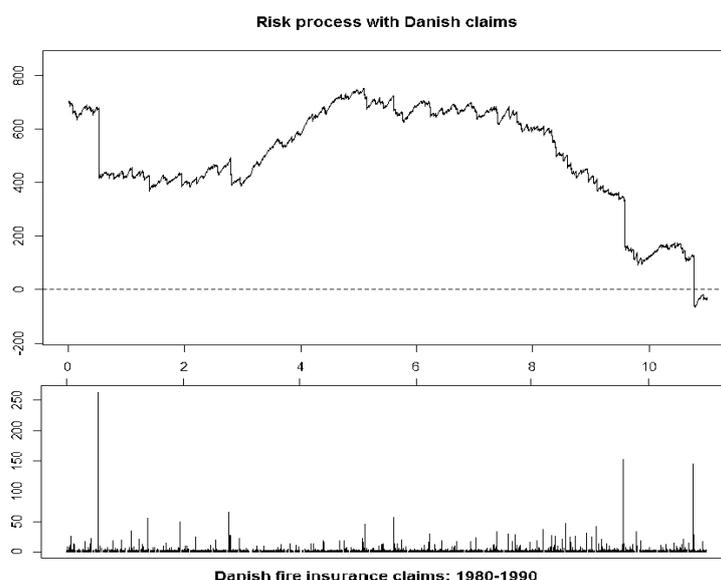


図 4: 上図は下図を基に描いた仮想的なサープラス過程。下図のクレームに対応する時刻にサープラスは下方にジャンプしている。1991 年の直前に破産。

このように保険サープラスの動きを俯瞰して観察してみると、小さなクレーム部分は小刻みなランダム・ウォークのように見えるであろう。そこでこのような変動をブラウン運動で近似することを考えるのだが、これが前節で見た複合ポアソン過程の拡散近似である。一方、実際のデータは極限を見ている訳ではないので、パスの全てをブラウン運動で近似してしまうのは適当でなく、大きなクレームは下方へのジャンプと見るのは妥当に思えるであろう。このように考えると、サープラスのモデルにブラウン運動と複合ポアソン過程を用いるのは自然に思える。また、株価に対する実証研究でも、株価の動きには下方ジャンプがあるとされる報告が多い (例えば, Carr *et al.* [1] など)。このため、デフォルトや破産確率計算のための資産モデルには下方ジャンプを持つような確率過程が用いられることが多い。

【参考】デンマークの火災保険クレームデータ

```
library(evir) # evirパッケージの読み込み
data(danish) # データセット"danish"を呼ぶ
Year <- attr(danish, "times") # "times"の列のデータを取り出す
plot(Year, danish, ylab = "Danish Fire Insurance Claims", type = "h")
```

このような観点から、ジャンプが負のレヴィ過程 (spectrally negative Lévy process) は、その数学的性質の良さからも資産モデルとして極めて有力な道具であり、例えば以下のようなモデルはその代表的なものである：

$$X(t) = x + ct + \sigma B(t) - S(t), \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

ただし、 x, c, σ は定数、 B は標準ブラウン運動、 $S \sim CP(\lambda, F)$ で正のジャンプを持つもの (subordinator) とする。以下、線形項の係数 c を X のドリフト (drift) と呼ぶことにする。

定数 $d \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\tau_d = \inf\{t > 0 \mid X(t) < d\}$$

として定まる初期到達時刻の分布関数

$$\psi_d(t) = P(\tau_d \leq t), \quad t \in \mathbb{R}$$

を、信用リスク解析ではデフォルト確率 (default probability)、保険数理では $d = 0$ として $\psi_0(t)$ を破産確率 (ruin probability) という。以下、これらをまとめて初期到達分布と呼ぶことにする。

2.2 ブラウン運動の初期到達分布

(2.1) のようなレヴィ過程 X については以下の事実が知られている (証明は清水 [5], 定理 6.4 を見よ)。

定理 3. $\theta = c - E[S(1)]$ とおく。このとき、 $\theta (\neq 0) \in \mathbb{R}$ ならば、確率 1 で以下が成り立つ：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = \theta$$

したがって、特に以下が成り立つ：

(i) $\theta > 0$ のとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty$$

(ii) $\theta < 0$ のとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty$$

また、 $\theta = 0$ のときは、以下が成り立つ：

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty$$

上記定理より直ちに以下が分かる。

$$\theta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_d(\infty) = 1$$

このような確率 1 での破産 (デフォルト) を避けるための必要十分条件は

$$\theta > 0$$

であり、これを純益条件 (net profit condition) という。

(2.1) のようなモデルにおいて、初期到達分布 ψ_d が解析的に陽な表現で得られることはごく稀であり、 S のようなジャンプを含む場合には、ほとんどの場合それは期待できない。そこで、何らかの数値的方法に頼ることになるが、モンテカルロ・シミュレーションはそのための有力な計算方法である。

以下のようなドリフト付きブラウン運動 (drifted Brownian motion) を考える：

$$X(t) = x + ct + \sigma B(t) \quad (2.2)$$

定理 3 の結果を、ドリフト付きブラウン運動のパスを観察することで実感してみよう。

ドリフトの符号の違いによる破産頻度の比較

#ドリフト付きブラウン運動(DBM)のパス・シミュレータ

```
simulateDBM <- function(Time, x, c, sigma){
  dt <- diff(Time) #サンプリング時刻
  Zt <- rnorm(length(dt), c*dt, sigma*sqrt(dt)) # DBMの増分を生成
  DBt <- diffinv(Zt)
  return( x + DBt ) # 初期値を追加してパスを生成
}
set.seed(123) # 乱数シード固定
Time <- seq(0, 1, by = 1/1000) # サンプリング幅の設定
MC <- 30 # 繰り返し回数
result <- replicate(MC, simulateDBM(Time, x = 4, c = 3, sigma = 2)
) # 正のドリフトは破産しにくい
matplot(Time,result,type="l",lty=1,col="grey", xlab="Time", ylab="Drifted BM", ylim=c
(-1,10)
) #パスをまとめてプロット
result2 <- replicate(MC, simulateDBM(Time,4,-3,2)
) # 負のドリフトは破産しやすい
par(new=T) # 図を重ね描き
matplot(Time, result2, ,type="l",lty=1,col="blue", xlab="Time", ylab="Drifted BM",
ylim=c(-1,10))
abline(h = 0, lty = 2, lwd = 2, col = "red")
text(0.4,9,expression(c>0), cex=2, col="grey")
text(0.2,1,expression(c<0), cex=2,col="blue")
```

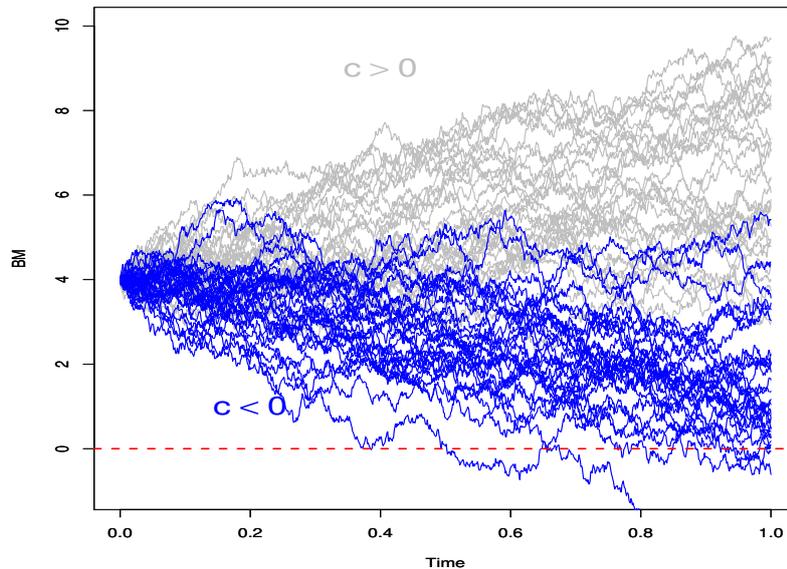


図 5: ドリフトの符号の違いによる破産頻度の比較

このモデルの初期到達分布 ψ_d については以下の表現が知られている (清水 [5], 定理 6.39) :

定理 4. 資産モデル (2.2) において, $c \in \mathbb{R}$, $x > d$, $\sigma \neq 0$ とする. このとき,

$$\psi_d(t) = 1 - \Phi\left(\frac{x-d+ct}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-2c(x-d)/\sigma^2} \Phi\left(\frac{-(x-d)+ct}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad t > 0.$$

ただし, Φ は標準正規分布の分布関数である.

この公式は c の符号に依らずに使えるが, $c > 0$ の時と $c < 0$ の時では, モンテカルロ法による初期到達分布の計算に大きな違いが出る. このことを見るために, モンテカルロ法による初期到達分布の近似計算と上記解析解との比較を行ってみよう.

```
### 破産確率のモンテカルロ計算
## 破産確率の解析解(定理4の式を定義)
psi <- function(t,x,c,sigma,d){
  x1 <- (x-d+c*t)/sigma/sqrt(t); x2 <- (d-x+c*t)/sigma/sqrt(t)
  return( 1 - pnorm(x1) + exp(-2*c*(x-d)/sigma^2)*pnorm(x2) )
}
## 破産を検出するシミュレータ
ruin.indicator <- function(Time,x,c,sigma){
  bm <- simulateDBM(Time,x,c,sigma) # DBMのパスの生成
  ind <- length(bm[bm<0]) # DBMのパスで負値があるか探す
  if(ind > 0) return(1) # 破産(ind>0)していたら1の値を返す
  else return(0)
}

Time <- seq(0,1,by=1/10000) # パスのサンプリング間隔を1/10000 に設定
# 注意: by=1/1000 くらいではパスが粗すぎでモンテカルロ計算でバイアスが出る
## モンテカルロ法による破産確率の近似計算
set.seed(123) # 乱数シードを固定
MC <- 1000 # 繰り返し回数
ruin.freq <- sum( replicate(MC, ruin.indicator(Time,x = 4, c = -3, sigma = 2))
) # 破産したパスの数
( ruin.prob <- ruin.freq/MC) # [0,1]での経験破産確率
[1] 0.403
( psi(1,4,-3,2,0) ) # 解析解
[1] 0.4023868
```

上記の計算を何度も繰り返して, モンテカルロ法の繰り返し回数 MC によってどれくらい収束するのかを観察したのが, 次の図 6 である (code は略).

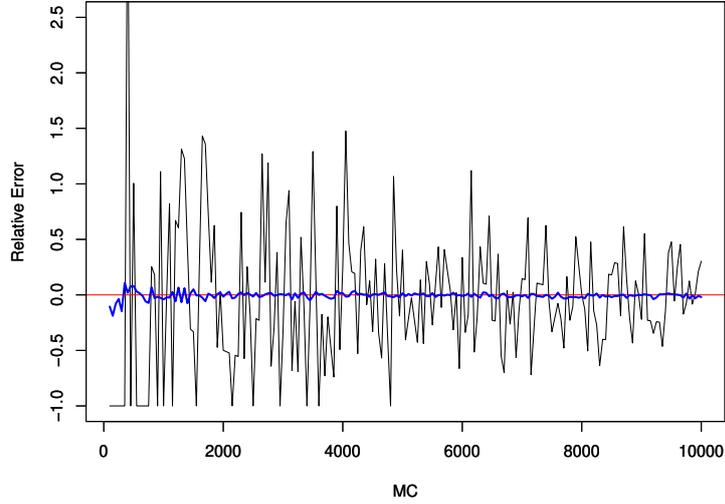


図 6: モンテカルロ法による破産確率近似の相対誤差. 黒線は $c = 3$, 青線は $c = -3$ の場合. $c > 0$ の時は破産事象はレア・イベントとなり破産確率が小さく, 収束は遅くなる.

3 ジャンプ拡散モデルと重点サンプリング

ジャンプが負のレヴィ過程による資産モデルを以下のように定める:

$$X(t) = x + ct + \sigma B(t) - L(t). \quad (3.1)$$

ただし, L は「ジャンプが正」のレヴィ過程であり, 簡単のために

$$\Psi_L(s) := \log E[e^{isL(1)}] = \int_0^\infty (e^{isz} - 1) \nu(dz), \quad s \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

を満たすものとする¹. ただし, ν はレヴィ測度である.

注意 3. レヴィ測度はレヴィ過程のジャンプの構造を決める測度であり, 無限分解可能分布の特性関数を記述する際に現れるものである. 特に複合ポアソン過程 $C(\lambda, F)$ の場合には

$$\nu(dz) = \lambda F(dz)$$

となる. 以下では複合ポアソンのケースのみを想定することとし, レヴィ測度に関する解説は省略する. 詳細は, Sato [2] や佐藤 [3] などを参照されたい.

さて, 定理 1, (3) で見たように, 正のジャンプをもつ複合ポアソン過程は (3.2) をみたす例である. Ψ_L をレヴィ指数 (Lévy exponent) という. このとき, レヴィ過程の性質より,

$$E[L(t)] = t \int_0^1 z \nu(dz) < \infty$$

である (今は $\nu(dz) = \lambda F_U(dz)$ と思ってよい).

¹このとき, L は有界変動な純粋ジャンプ過程 (pure jump process) である.

X 自身はレヴィ過程であり，定理 3 と同様に純益条件は以下になる：

$$\theta = c - E[L(1)] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad c > \int_0^\infty z \nu(dz) \quad (3.3)$$

さて，純益条件 (3.3) の下では， $\theta > 0$ が大きくなるほど破産確率が小さくなる．応用上もデフォルトや破産という事象は稀な事象 (レア・イベント, **rare event**) であり， $\theta > 0$ は大きな値をとることが多い．すると，前節のブラウン運動の破産確率シミュレーション ($c > 0$ のケース) で見たように，モンテカルロ計算による収束が遅くなるので，より正確な近似計算のためには繰り返し回数 (MC) を大きくする必要はあるが，時に膨大な時間がかかってしまうことがあり大変である．

そこで，適当に確率 P を P^* に測度変換することにより， P^* の下での破産確率を大きくして近似計算の効率を高める方法があり，これを**重点サンプリング (importance sampling)** という．以下では， X に対して具体的に P^* を作り，重点サンプリングによって破産確率を近似計算する具体的方法について解説する．

各 $t \geq 0$ に対して確率過程 $R = (R(t))_{t \geq 0}$ を以下で定める：

$$R(t) = x - X(t)$$

これを X のリスク過程 (**risk process**) という．このとき，

$$P_t^{(r)}(d\omega) = \frac{e^{rR(t)}}{E[e^{rR(t)}]} P(d\omega)$$

によって確率測度 $P_t^{(r)}$ を定める．このような測度変換を P のエッシャー変換 (**Esscher transform**) という．これを用いて，以下のように P と同値な確率測度を構成できる．

定理 5 (清水 [5], 補題 7.23)．以下の r に関する方程式：

$$\log E[e^{-rR(1)}] = 0$$

が負の解 $r = -\gamma$ ($\gamma > 0$) を持つとする．このとき， P と同値な確率測度 P^* が存在して，

$$P^*(A) = P_t^{(\gamma)}(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

が成り立つ．

上記の正数 $\gamma > 0$ を調整係数と呼ぶ．エッシャー変換を通して定義される P^* への確率測度の変換を行うことにより， P^* の下で X がレヴィ過程であることを保ちながら，その特性量を変化させ， P^* の下ではより破産の起こりやすい状況を生み出すことができるようになる．

定理 6．確率 P の下で (3.1)，および (3.2) のように表されるレヴィ過程 X は， P^* の下でもまたレヴィ過程であり，そのドリフト c_* ，拡散係数 σ_*^2 およびレヴィ測度 ν_* は

$$c_* = c - \gamma\sigma^2, \quad \sigma_*^2 = \sigma^2, \quad \nu_*(dz) = e^{\gamma z} \nu(dz)$$

として与えられる．このとき，特に

$$P^*(\tau_d < \infty) = 1$$

であり，任意の $t \in (0, \infty]$ に対して，

$$\psi_d(t) = E^* \left[e^{\gamma X(\tau_d)} \mathbf{1}_{\{\tau_d \leq t\}} \right] e^{-\gamma(x-d)}, \quad x > d \quad (3.4)$$

が成り立つ．ただし， E^* は P^* による期待値を表す．

証明は清水 [5], 補題 7.27, 定理 7.28 を見よ.

例 1. この定理を $c > 0$ のドリフト付きブラウン運動:

$$X(t) = x + ct + \sigma B(t) \quad (\text{under } P)$$

に当てはめて解釈してみると, この場合の調整係数は $\gamma = 2c/\sigma^2$ であり,

$$c_* = -c, \quad \sigma_*^2 = \sigma^2$$

となってドリフトの向きが逆転する. つまり, 確率法則 P^* の下では

$$X(t) = x - ct + \sigma B(t) \quad (\text{under } P^*)$$

となる. こうすると, 前節で見たように破産が起きやすくなり (図 5), モンテカルロ計算の収束が早くなり効率的に計算できる (図 6).

例 2. $Exp(\mu^{-1})$ を平均 μ の指数分布とする. 確率 P の下で $S \sim CP(\lambda, Exp(\mu^{-1}))$ となる複合ポアソン過程 S によって

$$X(t) = x + ct - S(t), \quad \text{under } P$$

を考える. 純益条件 $c > \lambda\mu$ を満たすとする. このとき, 調整係数は存在して

$$\gamma = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c} > 0$$

となることが分かる. したがって, P^* の下で

$$c_* = c, \quad \nu_*(dz) = \frac{c}{\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}z} \right) dz$$

となるから, $S^* \sim CP(c\mu^{-1}, Exp(\lambda c^{-1}))$ なる複合ポアソン過程によって

$$X(t) = x - ct - S^*(t), \quad \text{under } P^*$$

となる. S^* の強度 $c\mu^{-1}$ とジャンプの平均値 $c\lambda^{-1}$ に注意して P^* の下での純益条件を考えると,

$$c - \frac{c}{\mu} \cdot \frac{c}{\lambda} = c \left(1 - \frac{c}{\lambda\mu} \right) < 0$$

となって純益条件は成り立たず, 定理 3 によって, P^* の下では確率 1 で破産するモデルになっていることがわかる.

ドリフト付きの複合ポアソン過程: 測度変換によるパスの変化

複合ポアソンモデルの定義

```
mod.cp <- setModel(drift = "c", # ドリフト係数
  jump.coeff = -1, # ジャンプ過程の係数(負のジャンプ)
  measure.type = "CP", # ジャンプ測度をCP (複合ポアソン)に指定
  measure = list(intensity = "lambda", list(df = "dexp(z,1/mu)"))
  # ジャンプ測度: 強度(intensity)とジャンプの密度関数(平均muの指数分布)に分けて指定
)
```

サンプルング時点の定義

T <- 1 # 終端時点の設定

```
samp <- setSampling(Initial = 0, Terminal = T,
  n = 1000*T # サンプルング時点数(初期時点は除く) )
```

```

## 統計モデルの定義
dCP <- setYuima(model = mod.cp, # ドリフト付き複合ポアソンモデル
                sampling = samp # サンプルング時点
)
x0 <- 10 # 初期値
c <- 15; lambda <- 5; mu <- 1 # Pの下でのパラメータの設定
set.seed(123) # 乱数シードの固定
plot(simulate(dCP, xinit = x0,
             true.parameter = list(c = c, lambda = lambda, mu = mu)),
     ylim = c(-10,20), col = "blue") # Pの下でのパス
par(new=T) # 図の重ね描き
set.seed(123) # 上記と同じシードを指定
plot(simulate(dCP, xinit = x0,
             true.parameter = list(c = c, lambda = c/mu, mu = c/lambda)),
     ylim = c(-10,20), col = "red")
)# P^*の下でのパス
abline(h = 0, lty = 2)

```

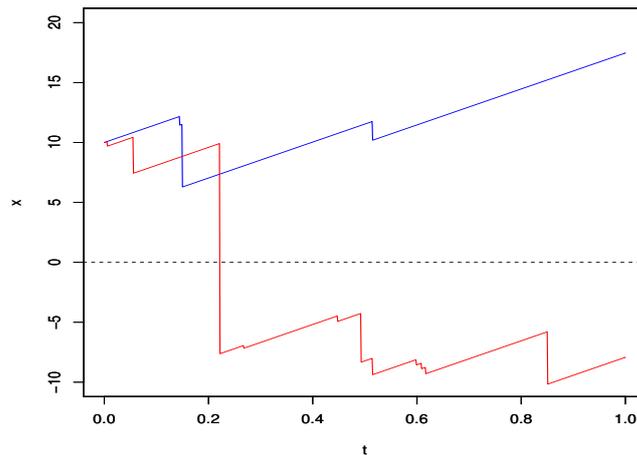


図 7: 青は P の下でのパス, 赤が P^* の下でのパス.

以下のシミュレーションでは, 例 2 に挙げた複合ポアソンモデルを用いて, “大きな” T に対する

$$\psi_0(T) = E^* \left[e^{\gamma X(\tau_d)} \mathbf{1}_{\{\tau_d \leq T\}} \right] e^{-\gamma x} \quad (3.5)$$

をモンテカルロ・シミュレーションにより計算し, $T = \infty$ の場合の解析解:

$$\psi_0(\infty) = \frac{\lambda \mu}{c} e^{-\gamma x}$$

とを比較する (この解析解の導出については, 清水 [5], 例 6.15 を参照).

```

###重点サンプリングによる破産確率計算
x0 <- 3 # 初期値
c <- 60; lambda <- 3; mu <- 1 # Pの下でのパラメータの設定

```

```

## P^*による期待値係数を計算するシミュレータ
gamma <- 1/mu - lambda/c # 調整係数
ruin.coeff <- function(smod, x0, param, gamma){
  out <- simulate(dCP, xinit = x0, true.parameter = param)
  dcp <- get.zoo.data(out)[[1]] # サープラスのデータを取り出す
  indicator <- dcp[which(dcp<0)]
  # (破産したかどうかを判定するために) X(t)の負値を取り出す
  if(length(indicator) >0){ # 破産していた時
    deficit <- indicator[1]
    # サープラスX(t)が最初に負になったときの値X(τ)を取り出す
    return( exp(gamma*deficit) ) # (3.5)式の係数(期待値の部分)を計算
  }
  else return(0)
}
}
##シミュレーション
param <- list(c = c, lambda = c/mu, mu = c/lambda) # P^*の下でのパラメータ設定
MC <- 100 # 繰り返し回数
set.seed(123)
coeff <- sum( replicate(MC, ruin.coeff(dCP, x0 = x0,
                                     param = param, gamma = gamma)) )/MC # 係数を算出
( ruin.prob <- coeff*exp(-gamma*x0)
)# モンテカルロ法による破産確率を表示
[1] 0.002780525
( psi0 <- (lambda*mu/c)*exp(-gamma*x0)
)# 解析解を表示
[1] 0.002892216

```

このように P^* の下では確実なデフォルト (破産) が起こるため、 τ_d に関するサンプルを集めやすくなり、(3.4) のモンテカルロ計算が効率的に行えるようになる。参考までに、モンテカルロの繰り返し回数の違いによる破産確率の収束を調べると以下のようなになる。

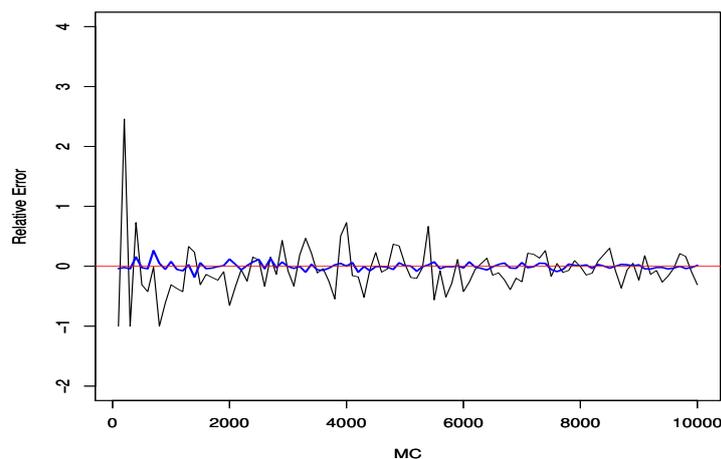


図 8: モンテカルロ法による破産確率近似の相対誤差。黒線は P の下での、青線は P^* の下での結果。

```

### 【参考】モンテカルロによるの収束の速さを観察(P^*の下でのシミュレーション)
set.seed(123)
MC <- seq(100,10000,by=100)
ruin.prob <- NULL
for(i in 1:length(MC)){
  coeff <- sum( replicate(MC[i],
    ruin.coeff(dCP, x0 = x0, param = param, gamma = gamma)) )/MC[i]
  # もしPの下でシミュレーションするなら,パラメータ設定を次のように変えればよい:
  # param <- list(c = c, lambda = lambda, mu = mu)
  ruin.prob <- append(ruin.prob, coeff*exp(-gamma*x0))
  # 繰り返し毎の破産確率を保存
}
plot(MC,(ruin.prob-psi0)/psi0,type = "l", lty = 1,
xlab = "MC", ylab = "Relative Error") # 相対誤差のプロット
abline(h=0, lty=1, col="red")

```

4 レヴィ-OU 過程と初期到達分布：縮約的アプローチ

4.1 点過程とデフォルト確率

信用リスク解析の分野では、企業の資産価値というものが明瞭でないとき、構造的アプローチではなく、デフォルトが起こるといふイベントの生起確率そのものをモデリングするアプローチが取られることがある。デフォルトのような状況は何度も起こり得るが、その時刻を T_n ($n = 1, 2, \dots$) とする。特に最初にデフォルトする時刻に興味があるので、 $\tau := T_1$ とおくとデフォルト確率は $P(\tau \leq t)$ で与えられる。このようなデフォルトに対するモデリングを縮約的アプローチ (reduced-form approach) という。以下では便宜上、デフォルトしない確率：存続確率 (survival probability),

$$\eta(t) := P(\tau > t)$$

を考えることにする。

縮約的アプローチでは T_1 の分布の定め方が重要になり、これは $T = (T_n)_{n=1,2,\dots}$ という系列が一定期間にどのような頻度で起こり得るかというモデリングを考える問題となる。そこで、イベント時刻の回数を数える確率過程を導入する。

定義 1. $(0, \infty]$ に値をとる確率変数列 $T = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が、任意の n に対して

$$T_n < T_{n+1}$$

を満たすとする。ただし、 $T_n = \infty$ ならば $T_{n+1} = \infty$ とする。このような T を点過程 (point process) とよび、時刻 $t > 0$ までの点過程の数を数える確率過程 $N = (N_t)_{t \geq 0}$:

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad t \geq 0$$

を T から定まる計数過程 (counting process) という。

例 3. 点過程 T において、

$$W_n := T_{n+1} - T_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

とし、 $(W_n)_{n=1,2,\dots}$ が独立に平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うと仮定する。このとき、

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

となることが示される (例えば, 清水 [5], 定理 5.17). このとき, N は強度 λ のポアソン過程と言われる. 点過程 T が (繰り返し起こりうる) デフォルト時点のモデルであるとき, デフォルト確率は

$$\eta(t) = P(\tau > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

となり, デフォルト時刻の分布は指数分布になる. このようなデフォルト・モデルはジャロー=ターンブル・モデル (**Jarrow-Turnbull model**) とされる.

デフォルトの瞬間的な発生率を,

$$\lambda(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t < \tau < t+h | \tau > t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N_{t+h} - N_t = 1 | \tau > t)}{h}$$

によって定めると, 上記 Jarrow-Turnbull モデルでは

$$\lambda(t) \equiv \lambda \text{ (定数)}$$

となり, デフォルトの発生頻度はどの瞬間においても一定であるとみなしていることになる.

4.2 レヴィOU 過程と Cox モデル

この $\lambda(t)$ を確率過程 $\lambda = (\lambda(t))_{t \geq 0}$ に自然に拡張したものをコックス・モデル (**Cox model**) という. このモデルの意味は, 時間によってデフォルト発生頻度 (強度) が変化し, $\lambda(t)$ が大きい値をとる時点ではデフォルトが起こりやすいというイメージである. 数学的には,

$$\eta(t) = E \left[\exp \left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right) \right] \quad (4.1)$$

と表される.

信用リスク解析では, この $\lambda = (\lambda(t))_{t \geq 0}$ のモデルにしばしば以下のようなレヴィ型のオルンstein=ウーレンベック過程 (レヴィOU 過程, **Ornstein-Uhlenbeck process**) が用いられる:

$$d\lambda(t) = -\theta\lambda(t) dt + dL(\theta t), \quad \lambda(0) = \lambda_0 > 0, \quad (\theta > 0) \quad (4.2)$$

ここで, $(L(t))_{t \geq 0}$ がレヴィ過程のとき, $(L(\theta t))_{t \geq 0}$ もレヴィ過程になることに注意しておく. このとき, この確率微分方程式は (ジャンプ型の) 伊藤の公式によって

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-\theta t} + e^{-\theta t} \int_0^{\theta t} e^s dL(s)$$

と解けることが知られている.

(4.1) の $\eta(t)$ を計算するには, 次の積分型 OU 過程 (**integrated OU process**)

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

が分かれば,

$$\eta(t) = E[e^{-\Lambda(t)}]$$

と計算できるので, 例えば $\Lambda(t)$ の特性関数が分かればよいが, これについては次の定理が知られている. 以下の詳細は Schoutens and Cariboni [4] を参照されたい.

定理 7. (4.2) に基づく積分型レヴィOU 過程 $Y = (\Lambda(t))_{t \geq 0}$ に対して,

$$\begin{aligned}\Psi_{\Lambda(t)}(u) &:= \log E[e^{iu\Lambda(t)}] \\ &= \theta \int_0^t \Psi_L(iu\theta^{-1}(1 - e^{-\theta(t-s)})) ds + iu\lambda_0\theta^{-1}(1 - e^{-\theta t}).\end{aligned}$$

ただし, Ψ_L は (3.2) で与えたレヴィ指数, $i = \sqrt{-1}$ である.

例 4. (4.2) において, $L \sim CP(a, Exp(b))$ とする. このとき,

$$\Psi_{\Lambda(t)}(u) = \frac{iu\lambda_0}{\theta}(1 - e^{-\theta t}) + \frac{\theta a}{iu - \theta b} \left(b \log \left(\frac{b}{b - iu\theta^{-1}(1 - e^{-\theta t})} \right) - iut \right)$$

と計算される. したがって,

$$\eta(t) = \exp(\Psi_{\Lambda(t)}(i)) \tag{4.3}$$

によってデフォルト確率の解析解を得る.

また, (4.1) を数値計算する際には, $\int_0^t \lambda(s) ds$ の積分を, パス毎にリーマン和を取って近似すればよい: 自然数 n に対して区間 $[0, t]$ の分割 $t_k = \frac{k}{n}t$ ($k = 1, 2, \dots, n$) をとり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda(t_{k-1}) \cdot \Delta = \int_0^t \lambda(s) ds$$

ただし, $\Delta = t_k - t_{k-1} \equiv t/n$.

例4のOU過程のパス・シミュレーション

OUモデルの定義

```
mod <- setModel(drift = "-theta*x", # ドリフト係数
  jump.coeff = 1, # ジャンプ過程の係数
  measure.type = "CP",
  # ジャンプ測度の指定方法: レヴィ過程の増分を発生させる乱数を指定
  measure = list(intensity = 4,
    df = "dexp(z,2)",
  # ジャンプ測度: 単位区間に対するレヴィ過程増分の従う乱数発生器を指定
  )
)
```

サンプリング時点の定義

```
n <- 1000; T <- 1
samp <- setSampling(Initial = 0, # 初期時点
  Terminal = T, # 終端時点
  n = n # サンプリング時点数(初期時点は除く)
)
```

統計モデルの定義

```
OU <- setYuima(model = mod, # 確率微分方程式モデル
  sampling = samp # サンプリング時点
)
```

シミュレーションとサンプルパスの描画

```
set.seed(223)
lambda0 <- 1 # 初期値
theta <- 1; a <- 4; b <- 2 # パラメータ設定
param <- list(theta = theta, shape = a, rate = b) # パラメーターの値
```

```

# シミュレーションの実行
result <- simulate(OU, # 統計モデル
                  xinit = lambda0, # 初期値
                  true.parameter = param # パラメーターの値
)
plot(result, col = "royalblue")

```

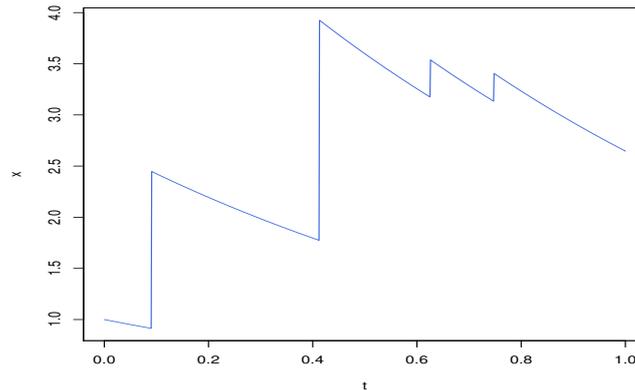


図 9: $\lambda_0 = 1, \theta = 1, a = 4, b = 2$ のときの (4.2) のパス。

```

### 例4のOU過程による生存確率シミュレーション
## 生存確率の解析解 :式(4.3)
eta <- function(t, lambda0, theta, a, b){
  exp( -lambda0*(1 - exp(-theta*t))/theta
        - theta*a*( b*log( b/(b + (1-exp(-theta*t))/theta)) + t )/(1 + theta*b) )
}
(etaT <- eta(T, lambda0, theta, a, b) ) # 生存確率の解析解を表示
## シミュレータの作成
ELambda <- function(smod, lambda0, param){
  out <- simulate(gammaOU, xinit = lambda0, true.parameter = param)
  lambda <- as.numeric(get.zoo.data(out)[[1]]) # パスの値を取り出す
  int.lambda <- sum(lambda[1:length(lambda)-1]/n)
  # lambda(t)の積分に対するリーマン和
  return(exp(-int.lambda))
}
## モンテカルロ・シミュレーション
MC <- 5000
t1 <- system.time(obj <- replicate(MC, ELambda(gammaOU, lambda0, param)))
print(t1)
surv.prob <- cumsum(obj)/(1:MC) # 5000回繰り返すまでの収束を観察
cat("analytic ", etaT, "\n") # 解析解の表示
cat("MC ", surv.prob[MC], "\n") # モンテカルロによるデフォルト確率
plot((surv.prob-etaT)/etaT,type = "l", lty = 1, xlab = "MC",
     ylab = "Relative Error") # 相対誤差のプロット
abline(h=0, lty=1, col="red")

```

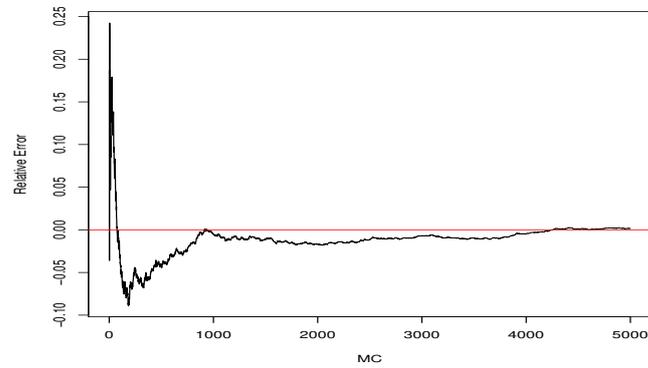


図 10: モンテカルロ法による存続確率近似の相対誤差.

参考文献

- [1] Carr, P.; Geman, H.; Madan, D. B.; Yor M. (2002). The fine structure of asset returns: an empirical investigation. *Journal of Business* **75**, (2), 305–332.
- [2] Sato, K. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] 佐藤健一 (1990). 加法過程. 紀伊國屋書店.
- [4] Schoutens, W. and Cariboni, J. (2009). *Lévy processes in credit risk*, John Wiley & Sons Ltd.
- [5] 清水泰隆 (2018). 保険数理と統計的方法, 共立出版