YUIMA による Lévy 過程の擬似生成*

増田 弘毅

九州大学

2018 年 12 月 2 日
yuima チュートリアル

*研究助成: JST CREST Grant Number JPMJCR14D7

概要

1. Lévy 過程
2. 確率微分方程式：Lévy 過程の汎関数
3. 補遺

1. Lévy 過程
   - 理論背景いくつか
   - YUIMA で Lévy 過程を擬似生成
2. 確率微分方程式：Lévy 過程の汎関数
   - 理論背景いくつか
   - YUIMA で SDE を擬似生成
3. 補遺

離散時間ランダムウォーク

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j$$

- i.i.d. 確率変数 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$
- **独立定常増分性**を持つ：$S_k - S_l = \sum_{i=l+1}^{k} \epsilon_i$
  1. $S_{j_1} - S_{j_0}, S_{j_2} - S_{j_1}, \ldots, S_{j_n} - S_{j_{n-1}}$ は独立 $(n \in \mathbb{N})$
  2. $S_{j_k} - S_{j_{k-1}} \sim S_{j_k - j_{k-1}}$ $(k \in \mathbb{N})$

Lévy 過程：連続時間ランダムウォーク

$$X_t = \sum_{j=1}^{n}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) =: \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^n X$$

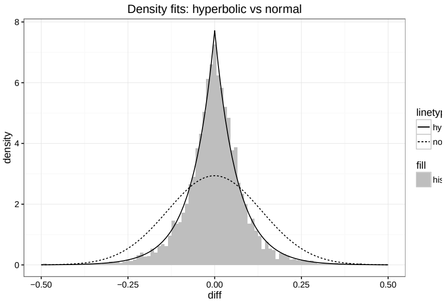
Lévy 過程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $X_0 = 0$

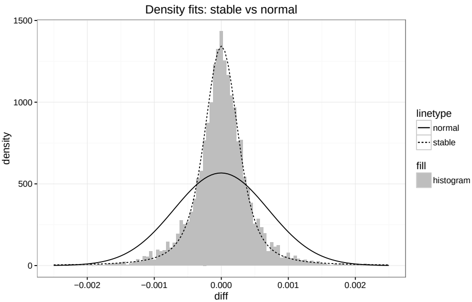
(L1) **独立定常増分性** $(0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n;\ n \in \mathbb{N})$

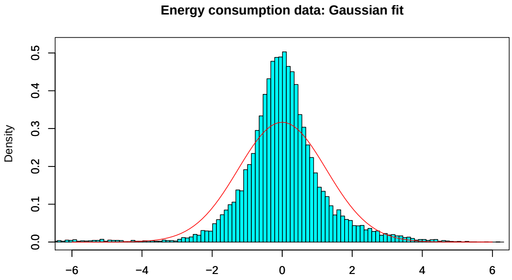
1. $X_{t_1} - X_{t_0}$, $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ は独立.
2. 各 j について $X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \sim X_{t_j - t_{j-1}}$

(L2) **確率連続性**
$t \geq 0$, $s \to t$ のとき X_s は X_t へ確率収束する

- X が「μ-Lévy 過程」 $\iff$ $X_1 \sim \mu$ (**無限分解可能分布!**)


Density fits: hyperbolic vs normal
density
diff
linetyp
hy
no
fill
his


Density fits: stable vs normal
density
diff
linetype
normal
stable
fill
histogram


Energy consumption data: Gaussian fit
Density

Lévy 過程の実体?

Lévy-伊藤の分解定理

$$X_t = \underbrace{bt + \sqrt{a}\, w_t}_{\text{正規因子}} + \underbrace{J_t}_{\text{非正規因子}}$$

- $(w_t)_{t\in[0,1]}$ の一つの表現（Karhunen-Loève 展開）：

$$w_t = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\{(k-t/2)\pi\}}{(k-1/2)\pi}Z_k, \quad t\in[0,1]$$

  - $Z_1, Z_2, \cdots \sim$ i.i.d. $N(0,1)$
- 一般の Lévy 過程の場合のパスの「級数表現」も複数あるが，非常に複雑で抽象的！

YUIMA による Lévy 過程の擬似生成へ向けて

$$X_t = bt + \sqrt{a}\, w_t + J_t$$

- $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ を擬似生成したい．
  - $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$
- X_t $(t > 0)$ を擬似生成できれば十分．
  - $X_t = \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^n X$
- YUIMA における Lévy 過程の擬似生成関数
  - `rng` 関数（random number generator）の help
  - Iacus and Yoshida (2018, Chapter 4)

Example 1: 複合 Poisson 過程

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} \epsilon_j$$

- 強度 $\lambda > 0$ の Possion 過程 N: $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$
- $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \sim$ i.i.d. μ; $\mu(\{0\}) = 0$, N と独立.

Example 2: 逆正規 Lévy 過程

- **時刻 t での分布の密度関数（$X_t \sim \mathrm{IG}(\delta t, \gamma)$, $\delta, \gamma > 0$）：**

$$y \mapsto \frac{\delta t e^{\delta t \gamma}}{\sqrt{2\pi}} y^{-3/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{(\delta t)^2}{y} + \gamma^2 y \right) \right\}, \quad y > 0.$$

Ex. 3: Normal inverse Gaussian Lévy 過程 Y（NIG-Lévy 過程）

- **正規分散平均混合：**

$$Y_t = \mu t + \beta Z_t + w_{Z_t}$$

  - Z: $\mathrm{IG}(\delta, \gamma)$-Lévy 過程
  - w: Z と独立な標準 Wiener 過程

- **Y_t の分布の密度関数：**

$$y \mapsto \frac{\alpha\delta t \exp\{\delta t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(y - \mu t)\} K_1(\alpha\psi(y; \delta t, \mu t))}{\pi\psi(y; \delta t, \mu t)}$$

  - $\alpha^2 := \gamma^2 + \beta^2$
  - $\psi(y; \delta t, \mu t) := \sqrt{(\delta t)^2 + (y - \mu t)^2}$

1. Lévy 過程
   - 理論背景いくつか
   - YUIMA で Lévy 過程を擬似生成
2. 確率微分方程式：Lévy 過程の汎関数
   - 理論背景いくつか
   - YUIMA で SDE を擬似生成
3. 補遺

Lévy 過程の汎関数：確率微分方程式

Stochastic Differential Equation (SDE)

$$dX_t = a(X_t)dw_t + b(X_t)dt + c(X_{t-})dJ_t$$

$$\left(X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t a(X_s)dw_s + \int_0^t c(X_{s-})dJ_s \right)$$

- $\displaystyle \int_0^t Y_{s-}dJ_s := \lim_{n\to\infty}{}^p \sum_{j=1}^n Y_{(j-1)t/n}\left(J_{jt/n} - J_{(j-1)t/n}\right)$
- (a, b, c) の Lipschitz 条件 $\Rightarrow$ 一意な強い解が存在：
  - $X_t = F(x_0, w, J)_t$ （Applebaum, 2009, Chapter 6）
- エルゴード性（不変分布の存在，大数の法則）：Kulik (2018)

Euler-丸山近似

- YUIMA の `simulate` 関数で SDE の解 X を擬似生成可能：

$$
\begin{aligned}
X_{t_{j+1}} \approx X_{t_{j-1}} &+ b(X_{t_{j-1}})(t_j - t_{j-1}) \\
&+ a(X_{t_{j-1}})\Delta_j w + c(X_{t_{j-1}})\Delta_j J
\end{aligned}
$$

- $\max_{j \le n}(t_j - t_{j-1})$ は十分小さくとる（理論上必要）.
  - $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$
- 各ステップにおいて $\Delta_j J$ の乱数が必要.
  - YUIMA の `simulate` 関数は Lévy 過程 `rng` を使用.

Example 4: 複合 Poisson 型ジャンプ付き拡散過程

$$dX_t = \{\sin(X_t) - X_t\}\, dt + 2dw_t - dJ_t$$

- $J_t \sim \Gamma(3t, 3)$：Gamma subordinator

Example 5: 幾何 Lévy 過程（⊃ 幾何 Brown 運動）

- Lévy 過程 $X_t = bt + \sqrt{a}\, w_t + J_t$ で駆動される SDE

$$dY_t = Y_{t-} dX_t, \qquad Y_0 = 1:$$

$$Y_t = \exp\left(X_t - \frac{a}{2}t\right) \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

- 直接 Euler-丸山法を適用して擬似生成する．
  アブストの code 要修正

Example 6: 無限分散 SDE

- 非正規安定 Lévy 過程：時点 $t > 0$ での特性関数が

$$u \mapsto \begin{cases} -(t^{1/\alpha}\sigma)^\alpha |u|^\alpha \left(1 - i\beta \mathrm{sign}(u) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right) + i\mu t u, & \alpha \neq 1 \\ -t\sigma|u|\left(1 + i\frac{2\beta}{\pi}\mathrm{sign}(u)\log|u|\right) + i\mu t u, & \alpha = 1 \end{cases}$$

- $(\alpha, \beta, \sigma, \mu) \in (0,2) \times [-1,1] \times (0,\infty) \times \mathbb{R}$;
  - $\alpha > 1 \Rightarrow$ 有限平均 & 無限分散
  - $\alpha = 1 \Rightarrow$ Cauchy Lévy 過程（歪んでいる可能性も）
  - $\alpha < 1 \Rightarrow$ 無限平均

$$dX_t = \frac{-X_t}{\sqrt{1+X_t^2}}dt + dJ_t$$

Example 7: 2 次元非線形係数の例

- X が 2 次元 (d 次元) でも Euler-丸山近似の原理は同じ：

$$X_{t_{j+1}} \approx X_{t_{j-1}} + b(X_{t_{j-1}})(t_j - t_{j-1}) + a(X_{t_{j-1}})\Delta_j w + c(X_{t_{j-1}})\Delta_j J$$

- YUIMA の乱数生成関数 `rng` は，NIG-Lévy 過程ほか数種類の多次元 Lévy 過程の擬似生成が可能．

$$d\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X_t^1 \\ 0.3X_t^1 - 1/\sqrt{1+(X_t^2)^2} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+(X_t^1)^2} & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dJ_t$$

1. Lévy 過程
   - 理論背景いくつか
   - YUIMA で Lévy 過程を擬似生成
2. 確率微分方程式：Lévy 過程の汎関数
   - 理論背景いくつか
   - YUIMA で SDE を擬似生成
3. 補遺

- rng でトラブル?
  - `help(rng)`
  - 上原 悠槙 (`y-uehara@ism.ac.jp`)
  - 増田 弘毅 (`hiroki@math.kyushu-u.ac.jp`)
- SDE モデリング・推測 オプション（建設中，進行中）
  - 残差系列に基づく検定：「ノイズはブラウン運動?」
  - 上原氏による qmleLevy
  - 定常分布（エルゴード性）のフィッティング
    - 可逆 (reversible) diffusion
    - Lévy-Ornstein-Uhlenbeck 過程