

# YUIMA による Lévy 過程の擬似生成

増田 弘毅

九州大学大学院数理学研究院

## 概要

Lévy (レヴィ) 過程は Wiener 過程や複合 Poisson 過程, その他多くの非正規ノイズ過程を包含するだけでなく, より広範な連続時間 Markov 過程などの構成要素としての役割も持つ. 本講演では, Lévy 過程と関連するモデルの基本事項, および YUIMA パッケージを用いた擬似生成法について, いくつかの具体例を通じて概説する.

## 1 Lévy 過程

確率変数  $X, Y$  と分布をあらわす記号  $F$  に対して,  $X \sim Y$  で  $X$  の分布と  $Y$  の分布が等しいことを, また  $X \sim F$  で  $X$  の分布が  $F$  であることをあらわす.

### 1.1 Lévy 過程の定義

離散時間ランダムウォーク

$$S_n = \sum_{j=1}^n \epsilon_j, \quad S_0 = 0 \quad (1.1)$$

は i.i.d. 確率変数  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  が離散時間軸  $\{0, 1, 2, \dots\}$  に沿って 1 つずつ加わっていくものであり, 独立定常増分性を持つ: 任意の有限時点  $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_n$  に対して,

- $S_{j_1} (= S_{j_1} - S_{j_0}), S_{j_2} - S_{j_1}, \dots, S_{j_n} - S_{j_{n-1}}$  は独立.
- 各  $k$  について  $S_{j_k} - S_{j_{k-1}} \sim S_{j_k - j_{k-1}}$

離散時間軸  $\{0, 1, 2, \dots\}$  を連続時間軸  $[0, \infty)$  に差し替えたものが Lévy 過程であり, この意味で Lévy 過程は連続時間ランダムウォークとみなせる: 原点から出発する実数値確率過程  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  が Lévy 過程であるとは, 以下の 2 つの条件が成り立つことである.

(L1) 独立定常増分性. 任意の有限時点  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  に対して,

1. 増分  $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  は独立.
2. 各  $j$  について  $X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \sim X_{t_j - t_{j-1}}$

(L2) 確率連続性. 各  $t \geq 0$  について,  $s \rightarrow t$  のとき  $X_s$  は  $X_t$  へ確率収束する.

Lévy 過程の定義自体は簡単なものであるが, それから膨大な結果が得られ, 確率過程論の基礎理論体系の一角を占めている ([9], [7]).

## 1.2 Lévy 過程の定義に関する諸注意

任意の時点  $t > 0$  と有限時点  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  に対して

$$X_t = \sum_{j=1}^n (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) =: \sum_{j=1}^n \Delta_j^n X \quad (1.2)$$

とあらわせるので、性質 (L1) は離散時間のときと見かけ上同じである。しかしここでは時点の「連続的な」任意性を要求されているためグリッドが固定されている離散時点の場合とやや状況が異なり、確率連続性 (L2) が追加されている。この性質は事前に固定されたジャンプ時点を持たないという要請である：各  $t > 0$  に対して、 $X$  が  $t$  でジャンプする確率は 0。例えば、離散時間のときの (1.1) を連続時間軸へ埋め込んだランダムな階段関数  $X_t = \sum_{j=1}^{[t]} \epsilon_j$  はこれを満たさず、Lévy 過程ではない ( $[t]$  は  $t$  の整数部分)。

確率変数  $Y$  の分布が無限分解可能であるとは、任意の  $n$  に対してある i.i.d. 確率変数列  $\epsilon_{n,1}, \dots, \epsilon_{n,n}$  が存在して

$$Y \sim \sum_{j=1}^n \epsilon_{n,j}$$

が成り立つことである。微小な誤差の累積から生じる現象の統計推測において、無限分解可能性は重要な概念である。

すでにみたことから、任意の  $t$  について  $X_t$  の分布は無分解可能になるが、より著しい以下の主張が成り立つ ( $t = 1$  は本質的ではない)：

任意の Lévy 過程  $X$  に対してある無限分解可能分布  $\mu \sim X_1$  が 1 つ定まり、逆に、任意の無限分解可能分布  $\mu$  に対して  $\mu \sim X_1$  となる Lévy 過程  $X$  が一意に定まる。

以下では、実数上の無限分解可能分布  $\mu$  が与えられたとき、 $\mu \sim X_1$  となる Lévy 過程  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  を「 $\mu$ -Lévy 過程」とよぶことにする。正規分布の他にも、複合 Poisson 分布、安定分布、(Student-)  $t$  分布、一般化逆正規分布、一般化双曲型分布 [10] など、応用において現れる多くの分布が無分解可能であることが知られている。ここで注意しておくべき点は、 $X$  が  $\mu$ -Lévy 過程でも、 $X_t$  ( $t \neq 1$ ) の分布は  $\mu$  の分布族から外れるかもしれないことである。例えば  $X$  が  $t$ -Lévy 過程の場合、 $X_t$  ( $t \neq 1$ ) の分布は一般に  $t$  分布ではない ( $t$  分布は再生性を持たないことに起因する)。

## 1.3 YUIMA による Lévy 過程の擬似生成

任意の時点  $t > 0$  と有限時点  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  に対して  $(X_{t_j})_{j=0}^n$ 、または同値な意味で独立確率変数列  $\Delta_1^n X, \dots, \Delta_n^n X$  を擬似生成したい。独立定常増分性により、任意の  $t > 0$  に対して  $X_t$  を擬似生成できれば十分である： $\Delta_1^n X, \dots, \Delta_n^n X$  を生成するには、独立に

$$X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_n-t_{n-1}}$$

を生成すればよい。一般の無限分解可能分布は、正規分布と非正規無限分解可能分布の畳み込みとしてあらわされる。Lévy 過程の場合  $X$ 、これはある定数  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \geq 0$ 、および畳み込みに正規因子を持たない Lévy 過程  $J$  によって

$$X_t = at + \sqrt{b} w_t + J_t, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

とあらわされることを意味する (Lévy-伊藤の分解定理) . したがって  $J_t$  の擬似生成だけ考えればよいが、一般には  $J$  の構造は高度に複雑になり得る (A.1, A.2 節参照) .

YUIMA には以下の Lévy 過程の擬似生成関数が複数備わっている . ここではいくつか選んで例示する . YUIMA パッケージの `rng` 関数 (random number generator) のヘルプファイルや [4, Chapter 4] もあわせて参照されたい .

### 1.3.1 複合 Poisson 過程

平均  $\lambda > 0$  の Poisson 分布は無限分解可能であり、対応する Lévy 過程  $N = (N_t)$  は強度  $\lambda > 0$  の Poisson 過程とよばれる . 強度  $\lambda$ , ジャンプ分布  $\mu$  を持つ複合 Poisson 過程  $X$  は

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} \epsilon_j$$

で定義される . ここで  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  は  $\mu(\{0\}) = 0$  を満たす共通分布  $\mu$  を持つ i.i.d. 確率変数列で  $N$  と独立なものである .  $X$  のサンプルパスは階段関数である : 区間  $[0, t]$  において、まずジャンプ時点の個数と場所  $0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N_t} \leq t$  が  $N$  によって決まり、そして各ジャンプ時点でのジャンプサイズは  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{N_t}$  で与えられる . なお、ジャンプ時点間隔の列  $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \dots$  は平均  $1/\lambda$  の指数分布に従う .

```
## Example 1: Compound Poisson jumps
set.seed(123)

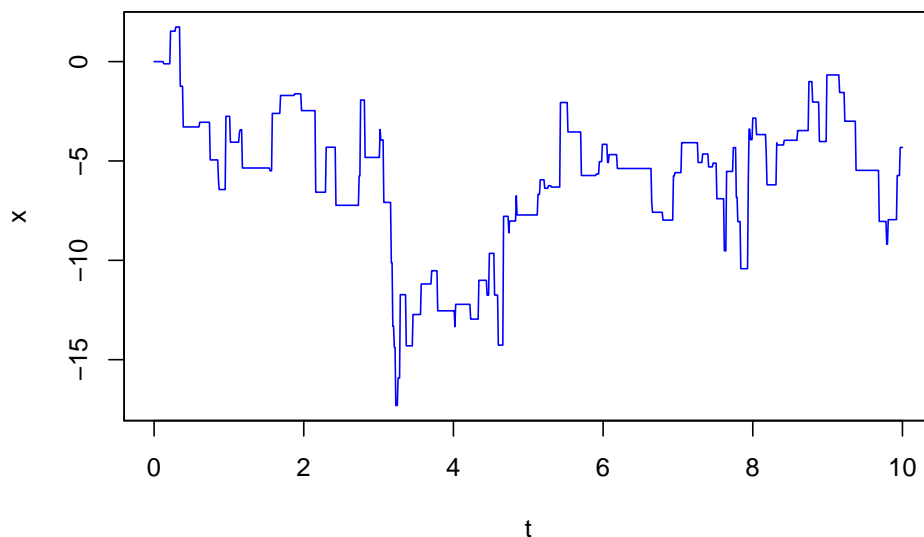
mod.cpp <- setPoisson(intensity = "lambda", df = list("dnorm(z,mu,sigma)"))

T <- 10 # terminal sampling time
samp <- setSampling(Initial = 0, Terminal = T, n = 100*T)
cpp <- setYuima(model = mod.cpp, sampling = samp)

param <- list(lambda = 10, mu = 0, sigma = 2)

X.cpp <- simulate(cpp, xinit = 0, true.parameter = param)
plot(X.cpp, col = "blue", main="Compound Poisson process")
```

Compound Poisson process



一般に Lévy 過程は有界時間区間上で可算無限個のジャンプ時点を持つ場合があり，その場合は複合 Poisson 過程ではない (A.1 節参照)．以下，そのような非正規 Lévy 過程の具体例を 3 種類紹介する．

### 1.3.2 逆正規 Lévy 過程

逆正規 Lévy 過程はサンプルパスが単調増加する Lévy 過程の一例で，時点  $t > 0$  での分布が

$$y \mapsto \frac{\delta t e^{\delta t \gamma}}{\sqrt{2\pi}} y^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{(\delta t)^2}{y} + \gamma^2 y \right) \right\}, \quad y > 0, \quad (1.4)$$

で与えられる．ここで  $\delta, \gamma > 0$  はパラメータである．ちなみに，単調増加 Lévy 過程は英語では subordinator とよばれる．

```
## Example 2: IG-Levy process (subordinator)
set.seed(123)

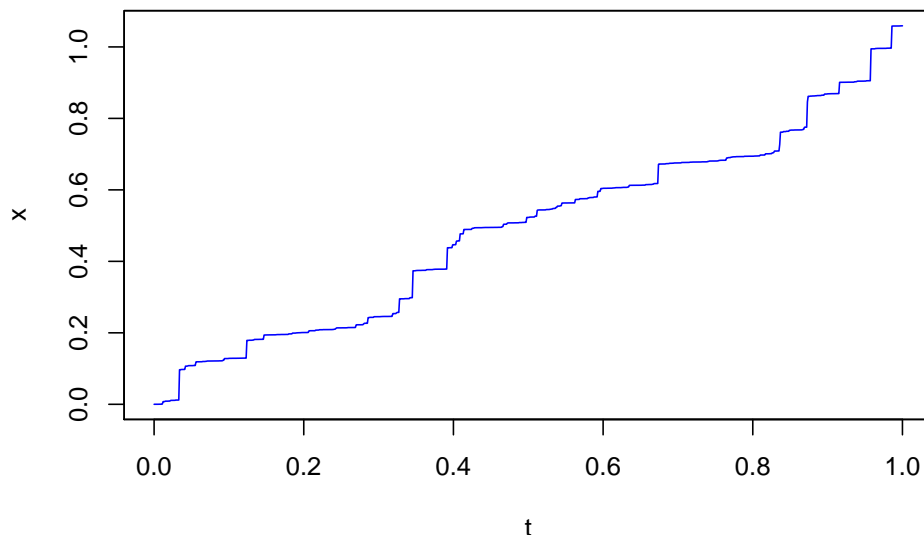
T <- 1
n <- 1000
jump <- "1"

mod.ig <- setModel(drift = "0", diffusion="0", jump.coeff = jump, solve.variable = "x",
  state.variable = "x", measure.type = "code", measure = list(df="rIG(z,3,3)"))

samp <- setSampling(Terminal=T, n=n)
ig <- setYuima(model=mod.ig, sampling=samp)

X.ig <- simulate(ig, xinit=0)
plot(X.ig, col="blue", main="IG-Levy process (Subordinator)")
```

IG-Levy process (Subordinator)



### 1.3.3 Normal inverse Gaussian Lévy 過程 (NIG-Lévy 過程)

NIG-Lévy 過程は，ドリフト付き Wiener 過程  $\beta t + w_t$  を，時点  $t$  で密度関数 (1.4) を持つ逆正規-Lévy 過程  $Z = (Z_t)$  によって従属操作を介して得られる．ここでの従属操作は，増加 Lévy 過

程とそれと独立な Lévy 過程から新たな Lévy 過程を構成する一般的な方法である [9, §8.2] . 非ラ  
ンダムな平行移動を加え , NIG-Lévy 過程  $Y = (Y_t)$  は以下で定義される :

$$Y_t = \mu t + \beta Z_t + w_{Z_t}$$

これは  $Y_t$  が  $Z_t$  の正規分散平均混合であることを意味する :  $Z$  と独立な  $\eta \sim N(0, 1)$  に対して

$$Y_t \sim \mu t + \beta Z_t + \sqrt{Z_t} \eta$$

ここでパラメータ  $\beta$  は歪みを , また  $\mu$  は位置をあらわす . このとき , 時点  $t > 0$  に対して  $Y_t$  の分  
布の密度関数は以下で与えられる :

$$y \mapsto \frac{\alpha \delta t \exp\{\delta t \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(y - \mu t)\} K_1(\alpha \psi(y; \delta t, \mu t))}{\pi \psi(y; \delta t, \mu t)}, \quad y \in \mathbb{R},$$

ここで  $\alpha^2 := \gamma^2 + \beta^2$ ,  $\psi(y; \delta t, \mu t) := \sqrt{(\delta t)^2 + (y - \mu t)^2}$  であり , また  $K_1(x)$ ,  $x > 0$ , は以下の積  
分で与えられる特殊関数である ( R では `besselK(x, 1)` ) :

$$K_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{x}{2} \left(y + \frac{1}{y}\right)\right\} dy$$

```
## Example 3: NIG-Levy process
set.seed(123)

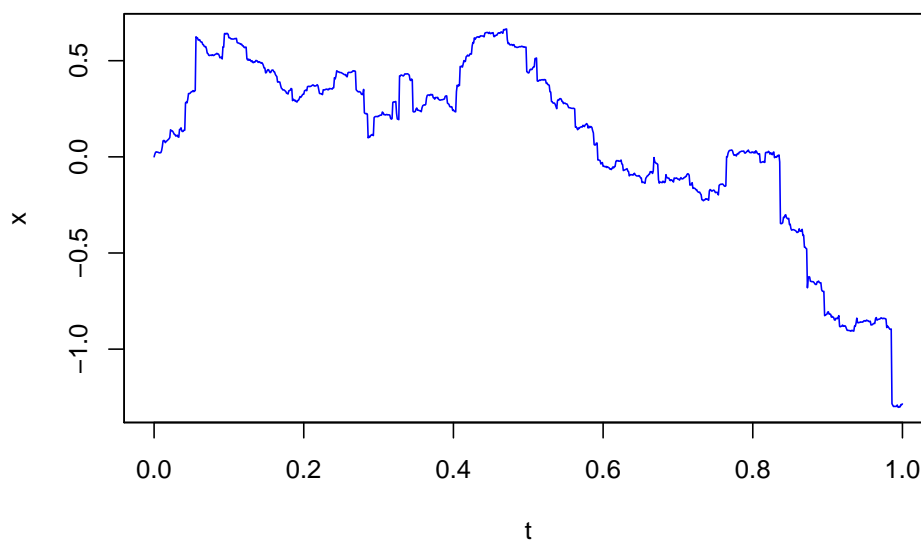
T <- 1
n <- 1000
jump <- "1"

mod.nig <- setModel(drift = "0", diffusion="0", jump.coeff = jump, solve.variable = "x",
  state.variable = "x", measure.type = "code", measure = list(df="rNIG(z,3,0,3,0)"))

samp <- setSampling(Terminal=T, n=n)
nig <- setYuima(model=mod.nig, sampling=samp)

X.nig <- simulate(nig, xinit=0)
plot(X.nig, col="blue", main="NIG-Levy process")
```

**NIG-Levy process**



### 1.3.4 非正規安定 Lévy 過程

最後に (非正規) 安定 Lévy 過程を紹介する．安定 Lévy 過程  $J$  は 4 次元パラメータ

$$(\alpha, \beta, \sigma, \mu) \in (0, 2) \times [-1, 1] \times (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

に依存し，時点  $t > 0$  での特性関数が

$$u \mapsto \begin{cases} -(t^{1/\alpha} \sigma)^\alpha |u|^\alpha \left( 1 - i\beta \operatorname{sign}(u) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right) + i\mu t u, & \alpha \neq 1, \\ -t\sigma |u| \left( 1 + i\frac{2\beta}{\pi} \operatorname{sign}(u) \log |u| \right) + i\mu t u, & \alpha = 1, \end{cases}$$

で与えられる Lévy 過程である．パラメータについて， $\alpha$  は安定指数 (モデルの自己相似指数，または分布の裾の厚さをあわらす)， $\beta$  は歪み度， $\sigma$  はスケール， $\mu$  は位置をあらわす．安定分布については効率の良い乱数生成法が知られており，YUIMA にも実装されている．

2.4 節で安定 Lévy 過程で駆動される確率微分方程式モデルの擬似生成を行う．

## 2 Lévy 過程の汎関数

i.i.d. 確率変数列から様々な時系列モデルが，また Wiener 過程から拡散過程が構成されるように，Lévy 過程は連続時間従属性モデリングにおける基本的な構成要素となる．

Lévy 過程に関する確率積分 (伊藤積分) の理論により，積分方程式

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s) ds$$

に対して，Lévy 過程の畳込み因子である  $w$  および  $J$  (cf. (1.3)) と十分滑らかな可測関数  $b, c$  でランダムな摂動を考えることができる：

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b(X_s) dw_s + \int_0^t c(X_{s-}) dJ_s.$$

ここで右辺第 3, 4 項はそれぞれ  $w, J$  に関する確率積分をあらわす (A.3 節)．この積分方程式を微分形式

$$dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dw_t + c(X_{t-}) dJ_t \quad (2.1)$$

であらわすのが慣例となっている．(2.1) は， $(w, J)$  で駆動される確率微分方程式 (Stochastic Differential Equation; SDE) とよばれる．係数関数  $a, b, c$  の Lipschitz 条件のもとで (2.1) は一意な解を持ち，それは初期変数  $x_0$ ，Wiener 過程  $w$ ，純粋ジャンプ型 Lévy 過程  $J$  の汎関数として実現される [1, Chapter 6]．最近ではエルゴード性 (不変分布の存在など) に関する理論結果も様々知られている (A.4 節)．

### 2.1 Euler-丸山法

拡散過程の場合のように，YUIMA の `simulate` 関数を用いて Lévy 駆動型 SDE (2.1) の解  $X$  のサンプルパスを擬似生成することができる [4], [8]．ここでは十分細かい時間幅で  $X$  を Euler-丸山

法で擬似生成する例を紹介する．そこからのサブサンプリングも拡散過程の場合とまったく同様に実行できる点に注意しておく．

固定期間  $[0, T]$  上で解  $X$  の標本路を  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  をもって擬似生成したい場合， $\max_{j \leq n} (t_j - t_{j-1})$  が十分小さいもとで Euler-丸山近似

$$X_{t_{j+1}} \approx X_{t_j} + a(X_{t_j})(t_j - t_{j-1}) + b(X_{t_j})\Delta_j w + c(X_{t_j})\Delta_j J$$

で逐次的に擬似生成していくことになるが，各ステップにおいて  $\Delta_j J$  の乱数が必要である．YUIMA の `simulate` 関数では，これを Lévy 過程シミュレータによって擬似生成して用いる．

一般に，観測幅  $h$  で離散サンプリングした場合の時系列モデルを考える際， $h \rightarrow 0$  の下で SDE モデル (2.1) で近似できることがある．例えば計量経済で有用な収益率変動を記述する GARCH モデルは，拡散近似可能 ( $c \equiv 0$ ) であることが古くから知られている [6]．これにより，例えば拡散過程は定常分布の特定が容易であるなど，極限モデルの有益な面を元々の離散時間時系列モデルへ近似的に反映させることが可能となる．

## 2.2 複合 Poisson 型ジャンプ付き拡散過程

$J$  を符号反転したものが強度  $\lambda = 10$ ，ジャンプ分布  $\Gamma(3, 3)$  の複合 Poisson の場合に  $X$  を擬似生成してみる．

$$dX_t = (\sin X_t - X_t) dt + 2dw_t - dJ_t$$

```
## Example 4: Diffusion with compound Poisson jumps
set.seed(123)

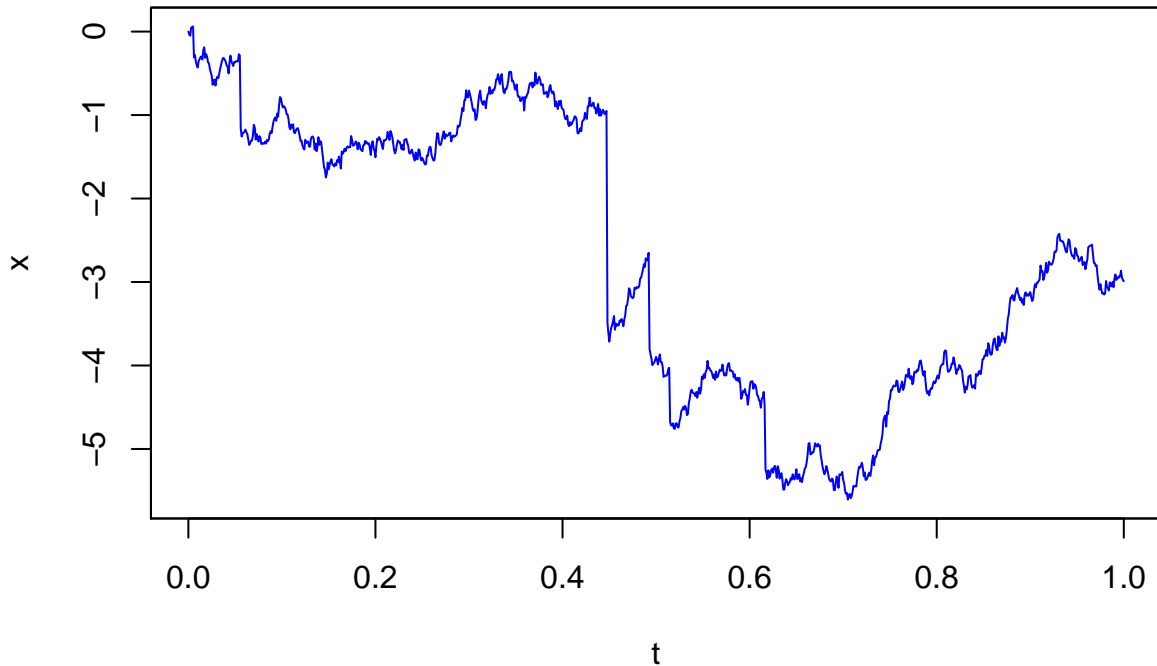
T <- 1
n <- 1000
jump <- "-1"

mod.dcppj <- setModel(drift=c("sin(x)-theta*x"), diffusion="sigma", jump.coef=jump,
                      measure=list(intensity="lambda", df=list("dgamma(z,3,3)")),
                      measure.type="CP", solve.variable="x")
samp <- setSampling(Terminal=T, n=n)
dcppj <- setYuima(model=mod.dcppj, sampling=samp)

param <- list(lambda = 10, theta = 1, sigma = 2)

X.dcppj <- simulate(dcppj, xinit=0, true.parameter=param)
plot(X.dcppj, col="blue", main="Diffusion with compound Poisson jumps")
```

## Diffusion with compound Poisson jumps



### 2.3 幾何 Lévy 過程

$X$  を Lévy 過程 (1.3) とする . SDE

$$dY_t = Y_{t-} dX_t, \quad Y_0 = 1, \quad (2.2)$$

の解は幾何 Lévy 過程とよばれ , 幾何 Brown 運動の一つの拡張になっている . (2.2) は陽な解

$$Y_t = \exp\left(X_t - \frac{b}{2}t\right) \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

を持つことが , 伊藤の公式を用いて確認できる [1, Section 5.1] .

解のジャンプ変動の部分  $\prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$  に注意する . これは  $X$  のジャンプが固定期間上で可算無限回ある場合だと直接生成は困難である . ここではとくに  $X$  が複合 Poisson でない場合において , SDE(2.2) へ直接 Euler-丸山法を適用して擬似生成する .

```
## Example 5: Geometric NIG-Levy process
set.seed(123)

T <- 1
n <- 1000
drift <- "x"
diff <- "x"
jump <- "x"

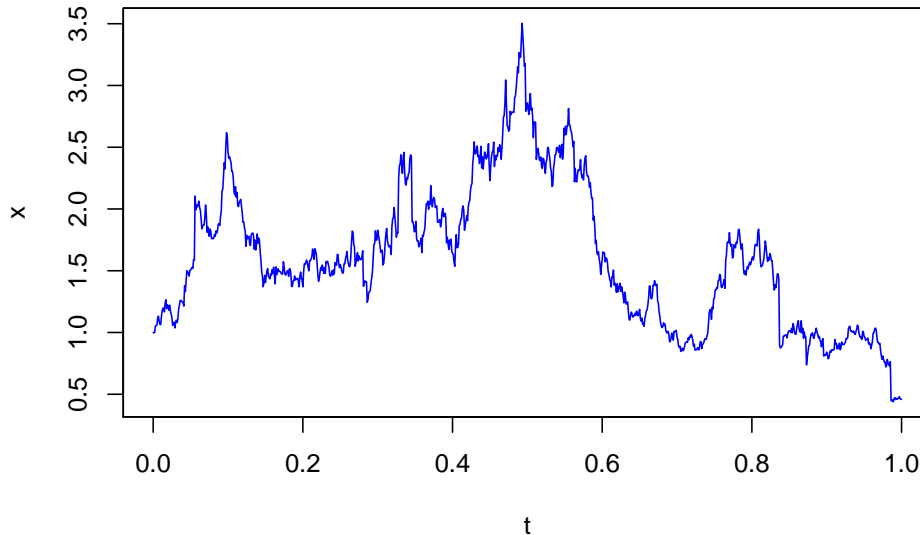
mod.gnig <- setModel(drift = drift, diffusion=diff, jump.coef = jump,
  solve.variable = "x",
  state.variable = "x", measure.type = "code",
  measure = list(df="rNIG(z,3,0,3,0)"))
```



```
samp <- setSampling(Terminal=T, n=n)
gnig <- setYuima(model=mod.gnig, sampling=samp)

X.gnig <- simulate(gnig, xinit=1)
plot(X.gnig, col="blue", main="Geometric NIG-Levy process")
```

### Geometric NIG-Levy process



## 2.4 無限分散 SDE

安定 Lévy 過程で駆動される場合には  $X$  の微小時間増分は無限分散安定分布で近似される。安定指数パラメータ  $\alpha$  は裾の厚さと同時に微小ジャンプの頻度を制御する。  $\alpha$  が 1.5 くらいに大きくなると結構拡散過程っぽくギザギザにみえてくるが、たまに突然大きなジャンプが生じる。

$$dX_t = -\frac{X_t}{\sqrt{1+X_t^2}}dt + dJ_t, \quad J_1 \sim \text{Stable}(1.3, 0, 1, 0)$$

```
## Example 6: Non-linear stable-Levy SDE
set.seed(123)

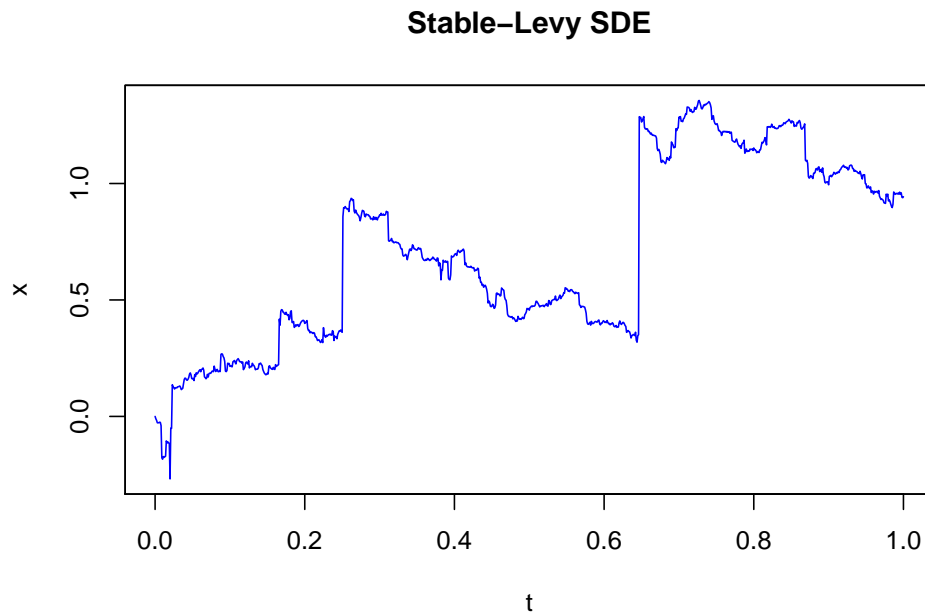
T <- 1
n <- 1000

drift <- "-x/sqrt(1+x^2)"
jump <- "1"

mod.st <- setModel(drift = drift, diffusion="0", jump.coeff = jump,
  solve.variable = "x",
  state.variable = "x", measure.type = "code",
  measure = list(df="rstable(z,1.3,0,1,0)"))

samp <- setSampling(Terminal=T, n=n)
st <- setYuima(model=mod.st, sampling=samp)
```

```
X.st <- simulate(st, xinit=0)
plot(X.st, col="blue", main="Stable-Levy SDE")
```



## 2.5 2次元非線形係数の例

$X$  が2次元になると係数関数がベクトル値・行列値になるが擬似生成の原理は本質的に同じである。YUIMAの乱数生成関数 `rng` は、NIG-Lévy過程ほか数種類の多次元 Lévy過程の擬似生成が可能である。

$$d \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X_t^1 \\ 0.3X_t^1 - 1/\sqrt{1+(X_t^2)^2} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+(X_t^1)^2} & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dJ_t$$

この例では、 $J$ としてNIG-Lévy過程の2次元版を用いている。

```
## Example 7: 2-dim. NIG SDE
set.seed(123)

T <- 1
n <- 1000

x0 <- c(0,0)
beta <- c(0.5,-0.3)
mu <- c(0,0)
delta0 <- 1
alpha <- 5
Lambda <- matrix(c(1,0,0,1),2,2)

jump <- matrix(c("1/sqrt(x1^2+1)", "0", "-0.5", "1"),2,2)

mod.nigsde2 <- setModel(drift=c("-2*x1", "0.3*x1-1/sqrt(1+x2^2)"), xinit=x0,
  solve.variable=c("x1", "x2"),
  jump.coeff=jump, measure.type="code",
  measure=list(df="rNIG(z,alpha,beta,delta0,mu,Lambda)"))
```

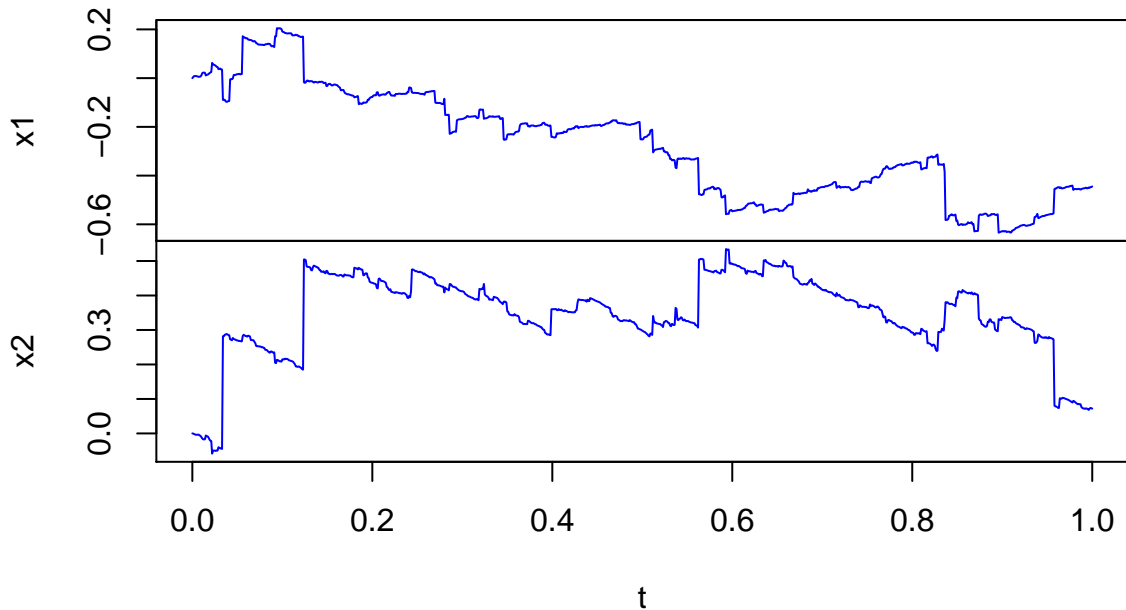
```

samp <- setSampling(Terminal=T, n=n)
nigsde2 <- setYuima(model=mod.nigsde2, sampling=samp)

X.nigsde2 <- simulate(nigsde2, true.par=list(alpha=alpha, beta=beta, delta0=delta0,
      mu=mu, Lambda=Lambda))
plot(X.nigsde2, col="blue", main="2-dimensional NIG-SDE")

```

## 2-dimensional NIG-SDE



## A 補遺

### A.1 サンプルパスの Lévy-伊藤分解 (1.3) について

Wiener 過程のサンプルパスは連続であるが、一般の Lévy 過程は、任意の時点で右連続かつ左極限を持つ（このとき  $X$  のサンプルパスは càdlàg であるという）。純粹ジャンプ型 Lévy 過程とは Wiener 部分を持たない、したがってジャンプのみで変動する Lévy 過程のことであり、(1.3) の  $J$  がこれに相当する。ここでは  $J$  の実体についてもうすこし形式的に触れておく。

事象  $A$  の指示関数  $I_A(\omega)$  を  $I(A)$  で、また時点  $t$  での  $X$  のジャンプサイズを

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-} \quad \left( X_{t-} := \lim_{s \uparrow t} X_s \right)$$

であらわす。  $X$  の大きいジャンプおよび小さいジャンプによる変動部分をそれぞれ以下で定義する：

$$X_t^{J,l} = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s I(|\Delta X_s| > 1),$$

$$X_t^{J,s} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s I(\epsilon \leq |\Delta X_s| \leq 1) - \mathbb{E} \left( \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s I(\epsilon \leq |\Delta X_s| \leq 1) \right) \right\}.$$

後者は  $t$  について任意の有界時間区間上で一様に（確率 1 で）収束する。一見して奇妙に思える形であるが、微小ジャンプが有界期間上で可算無限回生じ得るため、平均で中心化しないと一般に

$X_t^{J,s}$  の表現にある和は収束しない．収束のモードは異なるが，平均 0 に補正されて初めて非自明な極限が生じる中心極限定理と事情は似ている．

$X^{J,l}$  と  $X^{J,s}$  で  $X$  の全ジャンプは尽くされる． $X$  から  $X^{J,l} + X^{J,s}$  を除去したものは連続なサンプルパスを持つ Lévy 過程であって，それは (1.3) の右辺第 1 項と 2 項の和の形に等しい：

$$\begin{aligned} X_t &= \left\{ X_t - (X_t^{J,l} + X_t^{J,s}) \right\} + (X_t^{J,l} + X_t^{J,s}) \\ &= at + \sqrt{b} w_t + (X_t^{J,l} + X_t^{J,s}). \end{aligned}$$

つまり  $X^{J,l} + X^{J,s}$  が (1.3) の  $J$  の実体である．その分布は非常に複雑になり得る [9], [7]．

## A.2 微小ジャンプ変動の Wiener 過程（正規）近似

複合 Poisson 過程でない純粋ジャンプ部分を効率よく擬似生成するのは一般に難しいため，複数の近似的手段が研究されてきた．その中で，微小ジャンプによる非正規変動を適当にスケールリングし， $\epsilon \rightarrow 0$  として正規分布で近似する方法がある [2], [3]．残った大きい（サイズが  $\epsilon$  以上の）ジャンプ部分の処理や計算コストを念頭に置いた誤差評価水準の設定など，検討すべき実用上の問題点は依然残っている．

## A.3 確率積分と伊藤の公式

$X$  を Lévy 過程とする．適当な条件を満たす確率過程  $Y$  の  $X$  に関する和の確率収束極限

$$\int_0^t Y_{s-} dX_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n Y_{(j-1)t/n} (X_{jt/n} - X_{(j-1)t/n})$$

は確率（伊藤）積分とよばれる．Wiener 過程に関する確率積分のときのように  $X$  が無限変動だと，これは Riemann-Stieltjes 積分の意味では定まらない．とくに  $Y$  が非ランダムな関数の場合の確率積分  $\int Y_- dX$  は Lévy 積分とよばれ，独立増分性を持つ（一般に定常増分ではない）．

Lévy 過程 (1.3) の連続部分の二次変動は

$$\langle X^c \rangle_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (X_{jt/n} - X_{(j-1)t/n})^2 - \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2 = bt$$

となる．任意の  $C^2$ -関数  $f$  に対して，確率過程  $t \mapsto f(X_t)$  の時間発展を記述する伊藤の公式は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-}) d\langle X^c \rangle_s \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} \{ f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s \} \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} &= f(0) + \int_0^t \left( af'(X_{s-}) + \frac{b}{2} f''(X_{s-}) \right) ds \\ &\quad + \sqrt{b} \int_0^t f'(X_{s-}) dw_s + \int_0^t f'(X_{s-}) dJ_s \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} \{ f(X_{s-} + \Delta J_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta J_s \}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

ここで右辺の最後の和は  $t$  について  $[0, t]$  上一様に絶対収束する．ジャンプ項を持つ伊藤の公式 (A.2) は Lévy 過程やそれから派生する様々な確率過程モデルの解析において不可欠な道具である．とくに  $X$  が Wiener 過程であれば  $J$  は恒等的に 0 だから (A.2) の第 4, 5 項目は消える．なお，公式 (A.1) の形は， $X$  がより広範な右連続セミマルチンゲールの場合にも成り立つ．

以上の詳細については，例えば [1] とその参考文献をみよ．

#### A.4 エルゴード性

SDE (2.1) の係数関数  $a, b, c$  および  $J$  に関する適当な条件のもとで，(2.1) が実際に解を持つということだけではなく，周辺分布  $X_t$  の分布の裾の厚さ，また短期・長期記憶性など， $X$  の様々な特徴を制御可能である．とくに， $X_t$  の  $t \rightarrow \infty$  での弱収束極限  $\pi(dx)$  が存在してエルゴード定理

$$\frac{1}{T} \int_0^T g(X_t) dt \rightarrow \int g(x) \pi(dx), \quad T \rightarrow \infty$$

が成り立つための十分条件はかなり整備されてきている． $J$  により，局所的な（微小時間遷移における）非正規性を幅広く表現できるが，拡散過程の場合のような係数と不変分布の間に成り立つ一般的な関係式は存在しない（例外として Lévy-Ornstein-Uhlenbeck 過程がある）．

SDE(2.1) のエルゴード性・ミキシング性については [5] とその参考文献を参照されたい．

## 参考文献

- [1] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*, volume 116 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2009.
- [2] S. Asmussen and J. Rosiński. Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation. *J. Appl. Probab.*, 38(2):482–493, 2001.
- [3] N. Fournier. Simulation and approximation of Lévy-driven stochastic differential equations. *ESAIM Probab. Stat.*, 15:233–248, 2011.
- [4] S. M. Iacus and N. Yoshida. *Simulation and inference for stochastic processes with YUIMA*. Use R! Springer, Cham, 2018. A comprehensive R framework for SDEs and other stochastic processes.
- [5] A. Kulik. *Ergodic behavior of Markov processes*, volume 67 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, Berlin, 2018. With applications to limit theorems.
- [6] D. B. Nelson. ARCH models as diffusion approximations. *J. Econometrics*, 45(1-2):7–38, 1990.
- [7] K.-i. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author.
- [8] Uehara, Y. Help file of `qmleLevy`. (version May 16, 2017)  
<https://sites.google.com/site/yumauehara1928/yuima-package>,
- [9] 佐藤健一. 加法過程. 紀伊國屋書店, 1990.
- [10] 増田弘毅. GIG 分布と GH 分布に関する解析. *統計数理*, 50(2):165–199, 2002.