確率微分方程式入門

小池祐太

東京大学 MI センター・大学院数理科学研究科
CREST JST

2018 年 12 月 1 日

YUIMA チュートリアル
「確率微分方程式のデータサイエンス入門」

1. 確率微分方程式とそのシミュレーション
   - オイラー・丸山法
   - 代表的なモデル
   - 確率ボラティリティモデル
   - 不変分布とエルゴード性

確率微分方程式

- 時刻 t と状態 x を変数とする 2 つの関数 $a(t,x), b(t,x)$ を考える
- $(B(t))_{t\in[0,T]}$ をブラウン運動とする
- 確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ に関する以下の形の方程式

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dB(s), \qquad t \in [0, T] \tag{1}$$

をブラウン運動 $(B(t))_{t\in[0,T]}$ で駆動される**確率微分方程式 (stochastic differential equation, SDE)** と呼ぶ

確率微分方程式

- (1) 式は微分方程式というより積分方程式だが, この呼び名は歴史的経緯による
- 特に, (1) 式は慣習として以下のような微分形で書き表される:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dB(t), \qquad t \in [0, T]. \tag{2}$$

- なお, 関数 $a(t,x), b(t,x)$ はそれぞれ確率微分方程式 (2) の**ドリフト係数**, **拡散係数**と呼ばれる
- ここでは, 確率微分方程式でモデル化される確率過程の具体例および諸性質を説明し, それらのシミュレーションによる確認を行う

オイラー・丸山法

- 一般に確率微分方程式が陽に解けることは稀であり, 多くの場合, 解のシミュレーションには数値的方法を用いる
- ここでは, そのような数値的方法のうち最もよく利用される代表的な方法である**オイラー・丸山法 (Euler-Maruyama scheme)** について説明する

オイラー・丸山法

- 時間区間 $[0, T]$ を n 等分割した時点 $t_i = i\Delta_n$ $(i = 0, 1, \ldots, n;$ $\Delta_n = T/n)$ をサンプル時点として確率微分方程式 (2) の解をシミュレーションする問題を考える
- オイラー・丸山法では, 表現 (1) より,

$$X(t_{i+1}) - X_n(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(s, X(s))ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X(s))dB(s), \quad i = 1, \ldots, n$$

が成り立つことを用いる
- n が十分大きければ, 上の式の右辺は

$$a(t_i, X(t_i))\Delta_n + b(t_i, X(t_i))(B(t_{i+1}) - B(t_i))$$

でよく近似できると考えられる

オイラー・丸山法

- この考えに基づいて，シミュレーションしたい系列 $(X(t_i))_{i=0}^n$ を，以下のように帰納的に定義される系列 $(\widehat{X}_n(t_i))_{i=0}^n$ で近似する:
  $\widehat{X}_n(0) := X(0)$ として，

$$\widehat{X}_n(t_{i+1}) = \widehat{X}_n(t_i) + a(t_i, \widehat{X}_n(t_i))\Delta_n + b(t_i, \widehat{X}_n(t_i))(B(t_{i+1}) - B(t_i)), \quad i = 1, \ldots, n$$

  と定義する
- 適当な条件下でこの近似法が正当化できること，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i=0,1\ldots,n} |\widehat{X}_n(t_i) - X(t_i)| = 0$$

  が成り立つことが知られている

YUIMA による確率微分方程式のシミュレーション

- R のパッケージ yuima では, 直感的な記述によって, 一般的な確率微分方程式モデルのシミュレーション・パラメーター推定・モデル評価という一連の統計解析を実行するためのフレームワークを用意している
- ここでは例として, 未知パラメーター θ を含む確率微分方程式

$$dX(t) = -\theta X(t) + \frac{1}{1+X(t)^2} dB(t), \qquad t \in [0,1]$$

を yuima によってシミュレーションする方法を説明する
- YUIMA によるシミュレーションの例 (資料 25–26 ページ目)

幾何ブラウン運動

- μ を定数, σ を正の定数とする
- ドリフト係数が $a(t,x)=\mu x$, 拡散係数が $b(t,x)=\sigma x$ の場合の確率微分方程式 (2)

$$dX(t)=\mu X(t)dt+\sigma X(t)dB(t), \qquad t\in[0,T] \tag{3}$$

の解をドリフト μ, ボラティリティ σ の**幾何ブラウン運動**と呼ぶ

- ファイナンス分野では, この確率過程によってリスク資産の価格過程をモデル化し, そのリスク資産に紐づけられた他の商品の理論価格を導出するという方法が成功をおさめたため, 提案者の名前にちなんで**ブラック・ショールズモデル (Black-Scholes model)** と呼ばれることが多い

幾何ブラウン運動

- 確率微分方程式 (3) は陽に解くことができて, その解は

$$X(t) = X(0)\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right), \qquad t \in [0, T] \tag{4}$$

  で与えられる (伊藤の公式で確認できる)
- YUIMA によるシミュレーションの例 (資料 27–29 ページ目)

オルンシュタイン・ウーレンベック過程

- θ, μ, σ を定数とする
- 確率微分方程式

$$dX(t) = -\theta(X(t) - \mu)dt + \sigma dB(t) \tag{5}$$

の解として与えられる確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ を**オルンシュタイン・ウーレンベック過程 (Ornstein-Uhlenbeck process)** と呼ぶ

- 確率微分方程式 (5) は陽に解くことができて, その解は

$$X(t) = X(0)e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB(s)$$

で与えられる (伊藤の公式を用いると確認できる)

オルンシュタイン・ウーレンベック過程

- オルンシュタイン・ウーレンベック過程の性質
  1. 初期値 $X(0)$ が定数であれば, $X(t)$ は平均 $X(0)e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t})$, 分散 $\sigma^2 \int_0^t e^{-2\theta(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})$ の正規分布に従う
  2. $\theta > 0$ の場合, オルンシュタイン・ウーレンベック過程は**平均回帰性**をもつ
     - ★ 確率過程のサンプルパスがある一定の水準 (平均回帰レベルと呼ばれる) を上下動し, その水準から大きく乖離しても長期的にはその水準へと戻っていく性質をもつ
     - ★ 実際, 確率微分方程式 (5) のドリフト係数は

$$-\theta(X(t) - \mu) \begin{cases} < 0 & \text{if } X(t) > \mu, \\ > 0 & \text{if } X(t) < \mu \end{cases}$$

       という性質を持つから, 常に平均回帰レベル μ へと過程を押し戻す力を働かせている
     - ★ 特に, パラメーター θ は平均回帰レベルへと向かうスピードを表すと解釈することができるため, **平均回帰スピード**とも呼ばれる

オルンシュタイン・ウーレンベック過程

- ファイナンスの分野では, 金利の時系列過程は上述の「平均回帰性」をもつべきだと認識されている
- そのため, 平均回帰性をもつ確率過程の代表格であるオルンシュタイン・ウーレンベック過程は金利モデルとしても利用されてきた
- そのため, モデルの提案者にちなんで, ファイナンス分野ではオルンシュタイン・ウーレンベック過程のことを**バシチェックモデル (Vasicek model)** とも呼ぶ
- YUIMA によるシミュレーションの例 (資料 30–33 ページ目)

コックス・インガーソル・ロスモデル

- 確率微分方程式

$$dX(t) = -\theta(X(t) - \mu)dt + \sigma\sqrt{X(t)}dB(t), \qquad X(0) \geq 0 \qquad (6)$$

  の解として与えられる確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ は**コックス・インガーソル・ロスモデル (Cox-Ingersoll-Ross model, CIR model)** と呼ばれている (μ, σ は 0 以上の定数, θ は定数)
- ドリフト係数の形から明らかなように, $\theta > 0$ であれば CIR モデルもバシチェックモデル同様平均回帰性をもつ

コックス・インガーソル・ロスモデル

- バシチェックモデルと異なり, CIR モデルは扱いやすい解析解を持たないため, シミュレーションには通常オイラー・丸山法を用いる
- このとき注意が必要なのは, オイラー・丸山法は近似であるため, シミュレーションされた値が負になりうるということである
- そのためシミュレーションの際には負となった値は 0 以上の値に読みかえる工夫が必要であり, 次の実行例ではそのような工夫の一つを例示する
- YUIMA によるシミュレーションの例 (資料 34 ページ目)

ヤコビ過程

- 確率微分方程式
$$dX(t) = -\theta(X(t)-\mu)dt + \sigma\sqrt{X(t)(1-X(t))}dB(t), \quad 0 < X(0) < 1 \tag{7}$$
の解として与えられる確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ を**ヤコビ過程 (Jacobi process)** と呼ぶ
- 拡散係数 $\sigma\sqrt{X(t)(1-X(t))}$ が定義できるためにはすべての $t \in [0, T]$ について $0 \le X(t) \le 1$ となっていなければならないが，このためには
$$\frac{\sigma^2}{2\theta} \le \mu \le 1 - \frac{\sigma^2}{2\theta}$$
というパラメーター制約が満たされていればよいことが知られている

ヤコビ過程

- ヤコビ過程は 0 と 1 の間を時間発展する確率過程の典型例であり, 適当な 1 次変換を施すことで, 上限と下限があるような時系列のモデル化に利用することができる
  - 例: 相関パラメーターの時間発展のモデル化
- YUIMA によるシミュレーションの例 (資料 36–37 ページ目)

確率ボラティリティモデル

- これまでは 1 次元の確率過程・確率微分方程式のみを取り扱ってきたが, これらの概念は多次元の場合も同様に定義することができる
- オイラー・丸山法は多次元の場合に自然に拡張できるため, それを使って多次元の確率微分方程式もシミュレーションできるが, 実際にパッケージ `yuima` の関数 `simulate()` はその方法で多次元の確率微分方程式をシミュレートする機能を備えている
- ここでは, そのような多次元の確率微分方程式を `yuima` でシミュレートする方法を例示するために, ファイナンス分野で広く利用されている**確率ボラティリティモデル**をいくつか紹介する
  - 平たくいうと時間発展する分散をもつような確率過程モデルで, 分散の時間発展もまた確率過程で記述されるようなものの総称
  - ファイナンス分野では標準偏差のことをボラティリティと呼称することが多いことが名前の由来

ヘストンモデル

- μ, ρ を定数, θ, v, γ を正の定数とし, $|\rho| \leq 1$ であるとする
- $(B_1(t))_{t\in[0,T]}$ および $(B_2(t))_{t\in[0,T]}$ を 2 つの独立なブラウン運動とする
- 確率微分方程式

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dB_1(t), \quad S(0) > 0, \\ dV(t) = -\theta(V(t) - v)dt + \gamma\sqrt{V(t)}(\rho dB_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dB_2(t)), \end{cases} \tag{8}$$

で定義される 2 次元確率過程 $(S(t), V(t))_{t\in[0,T]}$ を**ヘストンモデル (Heston model)** と呼ぶ

ヘストンモデル

- ヘストンモデルでは, 確率過程 $(S(t))_{t\in[0,T]}$ は株価の時系列過程を表し, その収益率過程が時間発展する分散 $(V(t))_{t\in[0,T]}$ をもつようにモデル化されている
- $B(t) := \rho B_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}B_2(t)$ とおくと, 確率過程 $(B(t))_{t\in[0,T]}$ はブラウン運動となることが確認できる
- このとき, $(V(t))_{t\in[0,T]}$ を定義する確率微分方程式は

$$dV(t) = -\theta(V(t) - v)dt + \gamma\sqrt{V(t)}dB(t)$$

と書き直せるが, これは CIR モデルである

ヘストンモデル

- 多次元の確率微分方程式では，一般にドリフト係数はベクトル，拡散係数は行列で表現される
- これは，例えば方程式 (8) は，形式的には

$$\begin{pmatrix} dS(t) \\ dV(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu S(t) \\ -\theta(V(t) - v) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{V(t)}S(t) & 0 \\ \gamma\sqrt{V(t)} \cdot \rho & \gamma\sqrt{V(t)} \cdot \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

と書き表されるからである

- 従って，`yuima` でも多次元の確率微分方程式を記述するオブジェクトのドリフト係数，拡散係数はそれぞれベクトル，行列で表現される
- YUIMA によるシミュレーションの例 (資料 40–41 ページ目)

不変分布とエルゴード性

- 確率微分方程式 (2) において, ドリフト係数 $a(t,x)$ と拡散係数 $b(t,x)$ が状態変数 x にのみ依存する場合, **時間的に一様 (homogeneous)** であるという
- この場合, 係数の時間変数 t は省略してよいから, 時間的に一様な確率微分方程式は

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dB(t), \qquad t \in [0, T] \tag{9}$$

  と書ける
- 確率分布 Π で次の条件を満たすものが存在するとき, Π を確率微分方程式 (9) の**不変分布**または**定常分布**と呼ぶ:
  - 初期値 $X(0)$ が確率分布 Π に従って生成されるならば, すべての $t \in [0, T]$ について確率変数 $X(t)$ の分布は Π となる.

不変分布とエルゴード性

- 区間 (l, r) で常に正の値をとりそれ以外のところで 0 となるような確率密度関数 $f(x)$ が適当な条件を満たすときに, 平均回帰的なドリフト係数

$$a(x) = -\theta(x - \mu)$$

をもつ確率微分方程式 (9) で, その解が $f(x)$ に対応する確率分布を不変分布にもつようなものを具体的に構成することができる！ ($\theta > 0$ であり, $\mu = \int_l^r xf(x)dx$ は $f(x)$ に対応する確率分布の平均を表す)
- 実際,

$$b(x) = \left(\frac{\theta \int_l^x (\mu - y) f(y) dy}{f(x)} \right)^2$$

とおけば求めるべき確率微分方程式が構成できる

不変分布とエルゴード性

例 3.1 (正規分布)

$f(x)$ が標準正規密度関数の場合, 対応する確率微分方程式は

$$dX(t) = -\theta X(t)dt + \sqrt{2\theta}dB(t)$$

となる. これはバシチェックモデルである.

不変分布とエルゴード性

例 3.2 (ガンマ分布)

$\alpha \geq 1$, $\lambda > 0$ とする. $f(x)$ が形状パラメーター α, レート λ のガンマ分布の確率密度関数

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda}, \qquad x > 0$$

の場合, 対応する確率微分方程式は

$$dX(t) = -\theta(X(t) - \alpha/\lambda)dt + \sqrt{\frac{2\theta}{\lambda} X(t)} dB(t)$$

となる. これは CIR モデルである.

不変分布とエルゴード性

例 3.3 (ベータ分布)

$\alpha, \beta > 0$ とする．$f(x)$ がパラメーター α, β のベータ分布の確率密度関数の場合，対応する確率微分方程式は

$$dX(t) = -\theta \left(X(t) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) dt + \sqrt{\frac{2\theta}{\alpha + \beta} X(t)(1 - X(t))} dB(t)$$

となる．これはヤコビ過程である．

不変分布とエルゴード性

例 3.4 (t 分布)

$\nu > 1$ とする．$f(x)$ が自由度 ν の t 分布の確率密度関数の場合, 対応する確率微分方程式は

$$dX(t) = -\theta X(t)dt + \sqrt{\frac{2\theta}{\nu - 1}(\nu + X(t)^2)}dB(t)$$

となる．この場合の解は**スチューデント拡散過程 (Student diffusion)** と呼ばれることがある．

不変分布とエルゴード性

例 3.5 (F 分布)

$\alpha \geq 2, \beta > 2$ とする. $f(x)$ が自由度 α, β の F 分布の確率密度関数の場合, 対応する確率微分方程式は

$$dX(t) = -\theta \left(X(t) - \frac{\beta}{\beta - 2} \right) dt + \sqrt{\frac{4\theta}{\alpha(\beta - 2)} X(t)(\beta + \alpha X(t))} dB(t)$$

となる. この場合の解は**フィッシャー・スネデカー拡散過程 (Fisher-Snedecor diffusion)** と呼ばれることがある.

不変分布とエルゴード性

- 上で与えた例では, 実はどんな初期値から出発しても, 時間の経過とともに $X(t)$ の分布は不変分布へと近づいて行くことが知られている (このような性質を**エルゴード性**と呼ぶ)
- 以下では t 分布の場合について, 例 3.4 で与えた確率過程の不変分布が実際に t 分布となっていること, および確率過程がエルゴード性を持つことを確認してみる
- YUIMA によるシミュレーションの例 (資料 44–47 ページ目)