ブラウン運動と確率解析入門

小池祐太

東京大学 MI センター・大学院数理科学研究科
CREST JST

2018 年 12 月 1 日

YUIMA チュートリアル
「確率微分方程式のデータサイエンス入門」

1. ブラウン運動とその諸性質
   - 確率過程
   - ブラウン運動
   - ブラウン運動の諸性質
2. 確率積分と伊藤の公式
   - 確率積分
   - 伊藤の公式

確率過程

- **確率変数**
  - 値がランダムに決定される数値 (変数)
- **確率過程**
  - 値がランダムに決定される時刻 t の関数
  - 時刻 t の動く範囲としては閉区間 $[0, T]$ ($T > 0$) もしくは 0 以上の実数全体 $[0, \infty)$ を考える場合が多い
  - 本チュートリアルでは時刻 t の動く範囲としては $[0, T]$ を考える

例 1.1

ϵ を確率変数とする．各時刻 $t \in [0, T]$ について

$$X(t) := \sin(\epsilon t)$$

とおくと, 値がランダムに決定される時刻 t の関数 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が得られる．このような $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が確率過程の一例である.

確率過程

- 「確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$」という場合, $X(t)$ は時点 t で評価した確率過程の関数値を表す
- ランダムな決定の結果としてこの確率過程から得られる個々の関数のことを, この確率過程の**サンプルパス**と呼ぶ
- 確率過程を計算機でシミュレーションする場合, 実際には時刻 t を連続的に動かすことは不可能なため, 離散的なサンプル時点 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ を時間区間 $[0, T]$ を尽くすよう十分細かく定めて, それらの上で評価したサンプルパスをシミュレーションすることになる

確率過程

- 通常, 特に理由がない限りサンプル時点は等間隔に取るため, 以下ではその場合のみ考える
- 従って, サンプル時点は $t_i = Ti/n$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ という形で与えられるとして, 区間を分割する個数 n をシミュレーターのパラメーターとして扱う
- R での実行例: 例 1.1 で考えた確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ のシミュレーション (資料 2 ページ目)

ブラウン運動

定義 1.1 (ブラウン運動)

確率過程 $(B(t))_{t\in[0,T]}$ が**ブラウン運動 (Brownian motion)** であるとは, 以下の 4 つの条件が満たされることをいう:

(i) $B(0) = 0$.

(ii) $(B(t))_{t\in[0,T]}$ のサンプルパスは連続である.

(iii) $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le T$ ならば, $B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ は独立な確率変数列となる.

(iv) $0 \le s < t \le T$ ならば, 確率変数 $B(t) - B(s)$ と確率変数 $B(t-s)$ は共通の確率分布をもつ.

ブラウン運動は**ウィーナー過程 (Wiener process)** とも呼ばれる

ブラウン運動の増分の正規性

- ブラウン運動の定義では, 一見すると確率変数 $B(t)$ が特定の確率分布に従うことは要求されていないように見える
- しかし, 実は上の定義から $B(t)$ は必然的に正規分布に従うことが導かれることが知られている!!

命題 1.1 (ブラウン運動の増分の正規性)

$(B(t))_{t\in[0,T]}$ をブラウン運動とする. このとき, $0 \le s < t \le T$ に対して, 確率変数 $B(t) - B(s)$ は平均 0, 分散 $t - s$ の正規分布に従う.

ブラウン運動のシミュレーション

- 上の事実と独立増分性を使うことで, サンプル時点は $t_i = Ti/n$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) が与えられた際にブラウン運動のサンプルパスを以下の手順でシミュレーションできる:
  1. n 個の標準正規乱数 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ を発生させる.
  2. $B(t_0) := 0$ とする. また, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について

  $$B(t_i) := (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)/\sqrt{n}$$

  とおく
- R での実行例 (資料 4 ページ目)

ブラウン運動の諸性質: 二次変動の収束

命題 1.2 (二次変動の収束)

$(B(t))_{t\in[0,T]}$ をブラウン運動とする. また, $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $n\to\infty$ のとき 0 に収束する正数列とし, $t_{n,i} := i\Delta_n$, $i = 0, 1, \ldots,$ とおく. このとき, すべての $t \in [0, T]$ について

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i:t_{n,i}\le t} (B(t_{n,i}) - B(t_{n,i-1}))^2 = t \tag{1}$$

が成り立つ.

R でのシミュレーション例 (資料 5 ページ目)

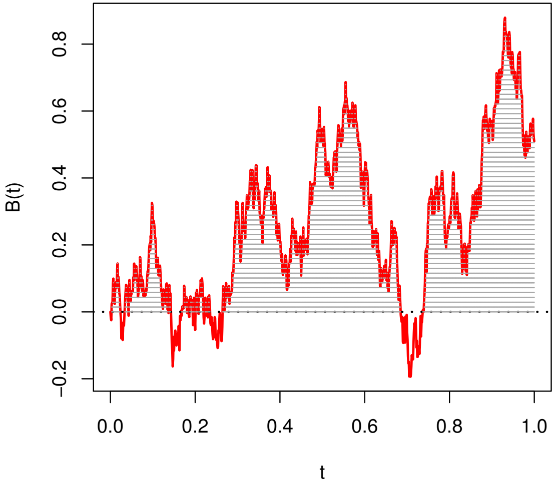
ブラウン運動の諸性質: 逆正弦法則

命題 1.5 (正の領域での滞在時間に関する逆正弦法則)

ブラウン運動 $(B(t))_{t\in[0,T]}$ のサンプルパスが正の値を取る時間帯の総時間数を Φ_T とすると, Φ_T の分布の確率密度関数は次式で与えられる:

$$f_{\Phi_T}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(T-x)}}, \qquad x \in (0, T).$$

R でのシミュレーション例 (資料 9 ページ目)



灰色の縞模様の部分の合計が Φ_T に対応

確率積分と伊藤の公式

- ここからは, 伊藤清によって創出された, 確率過程を解析するための代表的手法である確率積分の理論 (伊藤解析) を概観し, いくつかの結果をシミュレーションによって確認する
- 数学的結果を厳密に定式化・証明することは本稿の目的ではないため, そちらに関心がある場合は確率解析の専門書を参照していただきたい (資料にいくつか挙げてあります)
- 以下では $(B(t))_{t\in[0,T]}$ はブラウン運動を表すとする

確率積分

- $(X(t))_{t\in[0,T]}$ と $(Y(t))_{t\in[0,T]}$ を 2 つの確率過程とし, 両者とも連続なサンプルパスを持つとする
- ここでの目的は, 「積分」

$$\int_0^t X(s)dY(s), \qquad t \in [0, T] \tag{2}$$

  に適切な定義を与えることである
- 特に, $(Y(t))_{t\in[0,T]}$ がブラウン運動 $(B(t))_{t\in[0,T]}$ の場合に積分 (2) をうまく定義したい

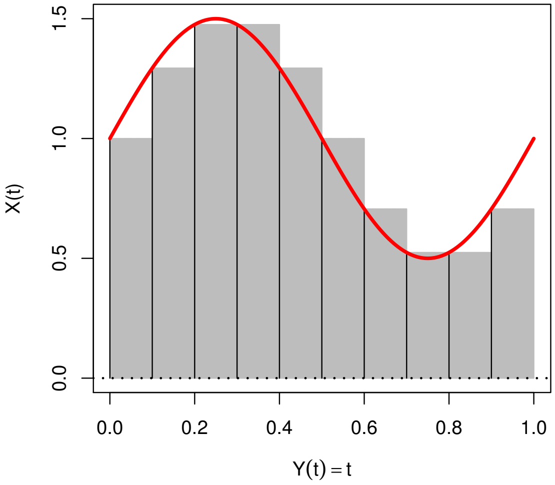
確率積分

- (2) のような積分を定義するための基本的なアプローチ
  (i) 「積分区間」[0, t] を等間隔の刻み幅をもつ時点 $t_{n,i} := it/n$ $(i = 0, 1, \ldots,)$ で n 等分割する
  (ii) 「リーマン和」

$$\sum_{i=1}^{n} X(t_{n,i-1})(Y(t_{n,i}) - Y(t_{n,i-1})) \tag{3}$$

  が $n \to \infty$ のとき (何らかの意味で) 収束する場合, その極限をもって積分 (2) を定義する

- $\boxed{\text{問題}}$ リーマン和 (3) はどのような場合に極限を持つか？
  - 関数 $Y(t)$ が微分可能ならば極限を持つことは知られている
  - しかし, ブラウン運動のサンプルパスはいたるところ微分可能でない!


1.5
1.0
0.5
0.0
X(t)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Y(t) = t

確率積分

- $(Y(t))_{t\in[0,T]}$ としてブラウン運動 $(B(t))_{t\in[0,T]}$ を考えた場合，リーマン和 (3) が極限を持つことを保証するには，「被積分過程」$(X(t))_{t\in[0,T]}$ に追加的な制約が必要
- 具体的には $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が次の仮定を満たせば十分であることが知られている:
  - 各時点 $t\in[0,T]$ において，確率変数 $X(t)$ は時点 t までのブラウン運動のサンプルパスの関数となる:

$$X(t)=f((B(s))_{s\in[0,t]}).$$

    ここに，f は区間 $[0,t]$ 上の関数を変数とする関数で，適切な条件を満たすもの
- 上の条件を満たすような確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ は**適合過程**であるという

確率積分

- 上で述べたように, $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が連続なサンプルパスをもつ適合過程の場合, リーマン和

$$\sum_{i=1}^{n} X(t_{n,i-1})(B(t_{n,i}) - B(t_{n,i-1}))$$

は極限を持つが, この極限を記号

$$\int_0^t X(s)dB(s) \tag{4}$$

で表し, B に関する X の**確率積分**もしくは**伊藤積分**と呼ぶ

確率積分

- 適合過程の代表例は, ある連続関数 $f(x)$ によって $X(t) = f(B(t))$ $(t \in [0, T])$ と書ける場合である
- R でのシミュレーション例 (資料 13 ページ目)
  - 確率積分 $\int_0^1 B(s)dB(s)$ に対応するリーマン和が実際に収束することを確認する (上で $f(x) = x$ の場合)
  - なお, この場合, 後述する伊藤の公式から

$$\int_0^1 B(s)dB(s) = \frac{B(1)^2 - 1}{2}$$

が成り立つため, リーマン和は $(B(1)^2 - 1)/2$ に収束するはずである

ウィーナー積分

- 別の代表的な適合過程の例として, $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が非ランダムな場合が挙げられる
- この場合の確率積分は特に**ウィーナー積分 (Wiener integral)** と呼ばれ, 正規分布に従うことが知られている:

命題 2.1

$(X(t))_{t\in[0,T]}$ は非ランダムであるとする. このとき, 確率変数 $\int_0^t X(s)dB(s)$ は平均 0, 分散 $\int_0^t X(s)^2 ds$ の正規分布に従う.

シミュレーションによる確認 (資料 14 ページ目)

- ウィーナー積分 $\int_0^1 t dB(t)$ が平均 0, 分散 $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$ の正規分布に従うことの確認

伊藤の公式

- 適合過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が微分可能なサンプルパスをもつとする
- このとき, $f(x)$ を C^1 級関数 (微分可能かつ連続な導関数を持つという意味) とすると, 微分積分学の基本定理と連鎖律より

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int_0^t \frac{d}{ds} f(X(s))ds = \int_0^t f'(X(s))\frac{d}{ds}X(s)ds$$
$$= \int_0^t f'(X(s))dX(s)$$

が成り立ち, $f(X(t))$ の積分表現を得ることができる

伊藤の公式

- 別の見方をすると，この等式は積分

$$\int_0^t f'(X(s))dX(s)$$

  をリーマン和による近似ではなく $f(X(t)) - f(X(0))$ によって直接計算する手段を与えており，積分計算の上で非常に有用である
- そのため，確率積分の場合にも類推した公式があると非常に便利だが，ブラウン運動のサンプルパスは微分可能でないから，上の議論は適用できない
- 実際，ブラウン運動の場合は追加の補正項が必要なことが知られている

伊藤の公式

定理 (伊藤の公式)

$f(x)$ が C^2 級関数ならば,

$$f(B(t)) - f(B(0)) = \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds$$

が成り立つ

伊藤の公式

- **例 2.1** $f(x) = x^2$ とすれば, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ であるから

$$B(t)^2 = 2\int_0^t B(s)dB(s) + t$$

を得る. 特に $t = 1$ の場合にこの式が成り立つことは先ほどのシミュレーションで確認した

- **例 2.2** $f(x) = e^x$ とすると, $f'(x) = f''(x) = e^x$ であるから,

$$e^{B(t)} = 1 + \int_0^t e^{B(s)}dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B(s)}ds$$

を得る $\cdots$ シミュレーションによる確認 (資料 19–20 ページ目)