

高頻度観測に基づく Hurst 指数の漸近有効推定

大阪大学大学院基礎工学研究科 高島 哲也
(共同研究者 大阪大学大学院基礎工学研究科 深澤 正彰)

非整数 Brown 運動を用いた現象のモデル化は、物理学・生物学・工学・経済学といった様々な学問分野で用いられている。その理由の一つとして、様々な現象において自己相似性と呼ばれるスケール則が存在することが広く認識されてきたことが挙げられる。例えば、対数株価過程におけるボラティリティの対数が自己相似性を持つとする実証研究 (cf.[1]) や高分子溶液のような不均質媒介中での拡散に現れる異常拡散 (cf.[3]) などはその典型的な例である。

話の簡略化のため以下では、拡散係数 σ と Hurst 指数 H を未知定数として含む非整数 Brown 運動 $\{B_t^{\sigma,H}\}_{t \in [0,T]}$ が離散観測される場合を考える。ここで我々が考察する問題は、有限期間 T において、等間隔離散的に観測されるデータ $\{B_{j\delta}^{\sigma,H}\}_{j=0,1,\dots,N}$ (δ は観測間隔, $N = \lfloor T/\delta \rfloor$, ただし $\lfloor \cdot \rfloor$ は Gauss 記号) が高頻度観測 ($\delta \rightarrow 0$) される状況下での未知定数 σ, H の統計的推測問題であり、特に自己相似性に関連するパラメータ H の推定に強い関心がある。我々の一つの目標は、上記設定下での漸近有効推定量の構成であるが、非整数 Brown 運動の拡散係数と Hurst 指数を高頻度観測に基づき同時推定する場合には、局所漸近正規性で現れる Fisher 情報量が退化するため、よく知られた漸近有効性の議論は適用できないことが知られている (cf.[2])。また、仮に上記いずれかの未知定数の値を既知とした (このとき、Fisher 情報量は退化しない。) より単純な問題設定下においても、漸近有効な推定量は知られていない。我々の主な貢献は、拡散係数または Hurst 指数のいずれかのパラメータが既知であるならば、有限期間に高頻度観測される場合においても漸近有効な推定量が構成できることを、ある Gauss 過程のクラスに対して示したことである。

本講演は主に 2 つの部分からなる。前半部分では、拡散係数と Hurst 指数がいずれも未知の場合における統計的推測問題を考察し、時系列解析でよく知られた Whittle 推定法のアイデアを応用して新たな推定手法を提案する。後半部分では、拡散係数が既知であるならば、その情報を用いて Hurst 指数の漸近有効推定量が構成できることを示す。

参考文献

- [1] Gatheral, J., Jaisson, T. and Rosenbaum, M. (2014): Volatility is rough, arXiv:1410.3394.
- [2] Kawai, R. (2013): Fisher information for fractional Brownian motion under high-frequency discrete sampling, Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 42, 1628-1636.
- [3] Masuda, A., Uchida, K. and Okamoto, T. (2005): Direct observation of spatiotemporal dependence of anomalous diffusion in inhomogeneous fluid by sampling-volume-controlled fluorescence correlation spectroscopy, Physical Review E, Vol.72, 060101-1-4.