Realized Stochastic Volatility モデルの多変量への拡張

石原庸博[*] 大森裕浩[†]

September 11, 2015

1 Introduction

本講演では，日次の株式収益率に対する離散時間時系列モデルである Stochastic Volatility (SV) モデル (確率的ボラティリティ変動モデル) に日中の高頻度取引データから計算された実現ボラティリティ測定値 (推定値) を導入したモデルについて扱う．特に，Takahashi, Omori, and Watanabe (2009) で提案された Realized SV(RSV) モデルの拡張を行う．一変量のシンプルな RSV モデルは

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2)\varepsilon_t && (1)\\
x_t &= \xi + h_t + u_t && (2)\\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, && (3)\\
(\varepsilon_t, \eta_t)', &\sim N_2(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}, \\
u_t &\sim N(\mathbf{0}, \sigma_u^2)
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここで y_t は日次収益率, x_t は対数実現ボラティリティ測定値 ($\log(RV_t)$), h_t は観測されない，真のボラティリティである．また，ξ は取引が行われていないことによるバイアスを調整するためのパラメータである．

このモデルは様々に拡張されている．ここでは特に y_t をベクトル $\boldsymbol{y_t} = (y_{1t}, \ldots, y_{pt})'$ とした場合の多変量 SV モデルへの拡張を考える．また，多変量へ拡張する場合には共分散の推定が必要になるので，実現共分散推定量を多変量 SV モデルへと導入する．

拡張において，表現したい日次収益率の性質としては以下のようなものがある．

- ボラティリティの時間変動と持続性 (ボラティリティクラスタリング),
- 収益率の相関の時間変動,
- 各系列のボラティリティの同時点での共変動,
- 日次のレバレッジ効果 (対称性),
- 別の系列への交差のレバレッジ効果 (対称性).

[*]大阪大学, 金融・保険教育研究センター
[†]東京大学経済学研究科

更に，実現共分散の観測方程式には ξ を多変量に拡張するが，Epps 効果の存在を考慮して，スカラーではなく，個別に影響を与えるようにする．

多変量 SV モデル定式化する際に重要になるのが時間変動する分散共分散行列の正定値性を保つことである．非対称性の導入を行っても正定値性が損なわれず，分散共分散行列の従う確率過程も比較的自由に扱える行列指数 (対数) 変換を用いたボラティリティモデルを考える．

$p \times p$ 正方行列 $\mathbf{A}$ に対して，

$$\exp(\mathbf{A}) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\mathbf{A}^s,$$

で定義する．一般には計算が困難で一対一の関数ではないが，$\mathbf{A}$ が対称行列の場合には直交行列 $\mathbf{U}$, 固有値の並んだ対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ を用いた対角化 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}'$ ができ，

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{U}\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\boldsymbol{\Lambda}^s\right)\mathbf{U}' = \mathbf{U}\exp(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{U}'.$$

で計算できるうえに一対一変換が存在する．

これを用いて行列指数 RSV モデル (MERSV モデル) を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \exp\left(\frac{\mathbf{H}_t}{2}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\mathbf{X}_t &= \boldsymbol{\Xi} + \mathbf{H}_t + \mathbf{U}_t, \\
\mathbf{H}_{t+1} &= \mathbf{M} + \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \odot (\mathbf{H}_t - \mathbf{M}) + \mathbf{E}_t,
\end{aligned}$$

ここで $\mathbf{X}_t = \log RC_t$ は時刻 t の実現共分散，$\exp(\mathbf{H}_t)$ は $\boldsymbol{y}_t$ の直接観測できない分散共分散行列である．大文字 $\mathbf{H}_t = [h_{ij,t}]$, $\mathbf{U}_t = [\upsilon_{ij,t}]$, $\mathbf{E}_t = [\eta_{ij,t}]$, $\boldsymbol{\Xi} = [\xi_{ij}]$, $\mathbf{M} = [\mu_{ij}]$, $\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = [\phi_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, p$ は全て $p \times p$ 対称行列である．

これを下三角行列にした $\boldsymbol{x}_t := \mathrm{vech}(\mathbf{X}_t)$, $\boldsymbol{h}_t := \mathrm{vech}(\mathbf{H}_t)$, $\boldsymbol{\xi} := \mathrm{vech}(\Xi)$, $\boldsymbol{\mu} := \mathrm{vech}(\mathbf{M})$, $\boldsymbol{\eta}_t := \mathrm{vech}(\mathbf{E}_t)$, $\boldsymbol{\upsilon}_t := \mathrm{vech}(\mathbf{U}_t)$, $\boldsymbol{\Phi} := \mathrm{diag}(\mathrm{vech}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}))$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \exp\left(\frac{\mathbf{H}_t}{2}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 1, \ldots, n, && (4) \\
\boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{h}_t + \boldsymbol{\upsilon}_t, \quad t = 1, \ldots, n, && (5) \\
\boldsymbol{h}_{t+1} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t, \quad t = 1, \ldots, n-1, && (6) \\
& \quad \boldsymbol{h}_1 \sim \mathcal{N}_q\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0\right), \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} &\sim \text{i.i.d.}\mathcal{N}_{p+q}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon} & \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta} \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\upsilon}_t &\sim \text{i.i.d.}\mathcal{N}_q(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\upsilon\upsilon}),
\end{aligned}$$

を推定する．

これを実現観測方程式のない行列指数 SV(MESV) モデル

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \exp\left(\frac{\mathbf{H}_t}{2}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \\
\boldsymbol{h}_{t+1} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t, ,
\end{aligned}$$

との比較を行う．比較に際してはデータが異なるため，周辺尤度や情報量基準ではなく，予測に基づく比較を行う．

これらのモデルは高次元のパラメータや潜在変数を持ち，潜在変数の解析的な積分消去も困難なため，通常の数値的最適化が困難である．そこで，本研究ではマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法を用いたベイズ推定を考える．また，MERSV, MESV モデルは行列指数変換を使用しているために，通常のパラメータの解釈が困難であるという問題がある．例えば $(\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta}$ は $\boldsymbol{y}_t$ のボラティィリティのレバレッジであるが, この $(1,1)$ 要素が y_{1t} のレバレッジ効果には対応しない．このような問題のために，シミュレーションの結果を用いた効果を表すパラメータに変換したものを考える．

本研究では，収益率の相関の時系列プロットを行うほか，ニュースインパクト曲線，各時点での主成分分析を行う．

ニュースインパクト曲線は $\boldsymbol{y}_t$ を変化させたときの $\exp(\mathbf{H}_{t+1})$ の変化を表した曲線である．$\boldsymbol{h}_{t+1}|\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{h}_t, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}$ の分布は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}_{t+1} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon} \exp(-\mathbf{H}_t/2)\boldsymbol{y}_t + \eta_t^{\dagger}, \\ \eta_t^{\dagger} &\sim \mathcal{N}_{p(p+1)/2}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta} - \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon}\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta}). \end{aligned}$$

と書ける．これを用いて $\boldsymbol{y}_t$ の各要素の変動からの $\exp(\mathbf{H}_{t+1})$ の各要素への影響を図示する．

また，対角化 $\mathbf{H}_t = \mathbf{W}_t \boldsymbol{\Lambda}_t \mathbf{W}_t'$ に基づき，

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_t' \boldsymbol{y}_t &= \exp(\boldsymbol{\Lambda}_t/2)\boldsymbol{\varepsilon}_t^*, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t^* &= \mathbf{W}_t' \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_p). \end{aligned}$$

のように変換することで $\boldsymbol{\varepsilon}_t^*$ $(\mathbf{W}_t' \boldsymbol{y}_t)$ は主成分，$\exp(\boldsymbol{\Lambda}_t)$ はその分散と解釈することができる．主成分寄与率 $\exp(\boldsymbol{\Lambda}_t)/\mathrm{tr}\exp(\boldsymbol{\Lambda}_t)$ を各時点で導出することで各系列の共変動を調べることができる．

これらを 5 次元の収益率と実現共分散行列の推定値に対して応用する．応用例に関しては当日紹介する．