Locally Cauchy SDE model with high-frequency data

増田 弘毅

九州大学大学院数理学研究院, JST CREST

要旨. ある $\beta < 2$ に対して $h^{-1/\beta} J_h$ が標準対称 β-安定分布 (特性関数が $u \mapsto e^{-|u|^\beta}$) へ収束する Lévy 過程を局所安定 Lévy 過程と総称する. 局所安定 Lévy 過程で駆動される確率微分方程式 (SDE)

$$dX_t = a(X_t, \alpha)dt + c(X_{t-}, \gamma)dJ_t, \qquad t \in [0, T],$$

から離散時点での高頻度等間隔データ系列 $(X_{t_j})_{j=0}^n$ が得られる状況において, 未知パラメータ $\theta = (\alpha, \gamma)$ の真値 $\theta_0 = (\alpha_0, \gamma_0)$ を推定することを考える. ただし $T > 0$ は所与の定数であり, $t_j = t_j^n = jh_n$, $h_n := T/n \to 0$ である. X が Lévy 過程の場合に限っても, 最尤推定量の漸近挙動は J の性質に依存して非自明に決まる (具体例は [5] 参照).

本講演ではまず安定型疑似尤度構成の背景を概説し, 特に一種の局所 Cauchy SDE を対象として安定型疑似推定量 (SQMLE) の漸近混合正規性のための条件を与える. この場合 SQMLE $\hat{\theta}_n = (\hat{\alpha}_n, \hat{\gamma}_n)$ は $\sqrt{n}$-収束率を持って漸近混合正規性を有し, 正規型疑似最尤推定量 [4] を真に改善する. 特に J が normal-inverse Gaussian (NIG) Lévy 過程の具体的な場合を詳しく見る. 余裕があれば, NIG 駆動型の場合の多変量版を含めたモデル設定の拡張, また多段階推定方式の定式化についても言及する. 特に後者は, 二次増分系列 $\Delta_j^{(2)} X := (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) - (X_{t_{j-1}} - X_{t_{j-2}})$ と SQMLE の併用を介して γ と α に関する最適化を分離することで計算負荷の削減を意図している (拡散過程の場合の多段階推定については [3] とその参考文献参照).

背景. X と局所安定 Lévy 過程 J が一次元の場合, 提案した SQMLE $\hat{\theta}_n = (\hat{\alpha}_n, \hat{\gamma}_n) \in \operatorname{argmax} \mathbb{M}_n$ は適当な条件の下で $\{\sqrt{n} h_n^{1-1/\beta}(\hat{\alpha}_n - \alpha_0), \sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)\}$ は正規分布の尺度混合へ分布収束する ([6], 投稿準備中). Student 化も可能である. SQMLE は Hajék-Jeganathan-Le Cam の意味で漸近的に最適であると期待され, 実際, [1], [2] によって特殊な場合には漸近最適性が示される. ここで安定型疑似尤度 $\mathbb{M}_n$ は標準対称安定分布の密度関数 ϕ_β を用いて

$$\mathbb{M}_n(\theta) = \sum_{j=1}^n \left\{ -\log c(X_{t_{j-1}}, \gamma) + \log \phi_\beta \left(\frac{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} - a(X_{t_{j-1}}, \alpha) h_n}{c(X_{t_{j-1}}, \gamma) h_n^{1/\beta}} \right) \right\}$$

で定義される. 特に Cauchy 型疑似尤度は

$$\mathbb{M}_n(\theta) = -\sum_{j=1}^n \left[\log c(X_{t_{j-1}}, \gamma) + \log \left\{ 1 + \left(\frac{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} - a(X_{t_{j-1}}, \alpha) h_n}{c(X_{t_{j-1}}, \gamma) h_n} \right)^2 \right\} \right].$$

観測期間 $[0, T]$ を固定するごとに $n \to \infty$ (データの高頻度性) とした場合の漸近混合正規性を導出できるため, T の変動に伴う推定精度に関する知見も得られる. SQMLE 構成のアイデア自体はシンプルで, X の微小時間遷移確率が

$$\mathbb{P}_\theta(X_{t_j} \in dy | X_{t_{j-1}} = x) \approx \frac{1}{c(x, \gamma) h_n^{1/\beta}} \phi_\beta \left(\frac{y - x - a(x, \alpha) h_n}{c(x, \gamma) h_n^{1/\beta}} \right) dy$$

だと "みなして" 解析することに相当する. これは拡散過程の場合の局所正規近似の考え方 ([3] の参考文献参照) の $\beta < 2$ の場合に相当する. 本講演の主眼である局所 Cauchy ($\beta = 1$) の場合は特殊であり, $\beta \in (1, 2)$ の場合と一線を画する.

References

[1] Clément, E. and Gloter, A. (3015), Local asymptotic mixed normality property for discretely observed stochastic differential equations driven by stable Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.* **125**, 2316–2352.

[2] Ivanenko, D., Kulik, A. M. and Masuda, H. (2014), Uniform LAN property of locally stable Lévy process observed at high frequency. arXiv:1411.1516

[3] Kamatani, K. and Uchida, M. (2015), Hybrid multi-step estimators for stochastic differential equations based on sampled data. *Stat. Inference Stoch. Process.* **18**, 177–204.

[4] Masuda, H. (2013), Convergence of Gaussian quasi-likelihood random fields for ergodic Lévy driven SDE observed at high frequency. Annals of Statistics 41, 1593-1641.

[5] Masuda, H. (2015), Parametric estimation of Lévy processes. Lévy Matters IV, Estimation for Discretely Observed Lévy Processes, pp.179–286. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2128, Springer.

[6] Masuda, H., Non-Gaussian quasi-likelihood estimation of locally stable SDE. In preparation.