

# リード・ラグ現象のモデル化と検出について

小池祐太

統計数理研究所リスク解析戦略研究センター  
CREST JST

「大規模統計モデリングと計算統計 II」アブストラクト

リード・ラグ現象とは、2つの時系列データの間に関係が現れる現象のことである。金融データでは、2つの資産間で新情報が価格に織り込まれる速度に差がある場合などに、その速度の差としてリード・ラグ現象が現れるとされている。例えば、株価指数とその先物の間には、先物の価格が先行するというリード・ラグ現象が観察されることが、多くの実証研究で古くから指摘されている (Kawaller, Koch & Koch (1987), de Jong & Nijman (1997) など)。リード・ラグ現象の分析は、例えば統計的裁定戦略についての考察 (Lo & MacKinlay (1990), Alsayed & McGroarty (2014) など) や市場の価格発見機能の研究 (Hasbrouck (1995), de Jong, Mahieu & Schotman (1998) など) において重要な役割を演じる。

近年、技術発展によって金融市場では取引の高速化が進み、過去の研究では週次や日次のスケールで観測されていたリード・ラグ現象が消滅していることが報告されている (Tóth & Kertész, 2006)。従って、金融データにおけるリード・ラグ現象の発見のためには、日内での取引データのようなより微小なスケールのデータ、すなわち (超) 高頻度データの分析が必要となる。本報告の目的は、超高頻度データにおけるリード・ラグ現象を柔軟に記述・統計分析できるモデルを提案することである。

超高頻度データにおけるリード・ラグ現象をモデル化・統計分析する試みはすでいくつかある。例えば、時系列分析の枠組みに落とし込むアプローチ (Kawaller *et al.* (1987), Hasbrouck (1995), de Jong & Nijman (1997) など)、ランダム行列理論を利用する方法 (Robert & Rosenbaum, 2010)、マルチンゲールによるモデル化 (Hoffmann, Rosenbaum & Yoshida, 2013)、点過程によるモデル化 (Bacry *et al.* (2013), Da Fonseca & Zaatour (2015) など) が挙げられる。本報告では Hoffmann *et al.* (2013) のモデル (HRY モデルと呼ぶことにする) をベースに、以下に述べる、このモデルが含む問題点を解消できるようなモデルを構築することを試みる。

本報告で解消を試みる HRY モデルの問題点は次の2点である:

- (1) タイムラグの大きさは1日以内で均一か?
- (2) マイクロストラクチャーノイズ

まず (1) について、HRY モデルではタイムラグは時間的に一定であることを仮定しているが、Huth

(2012) ではタイムラグには日内季節性が見られることが指摘されている。そのため、このような現象を記述・統計分析できるようなモデルがあると好ましい。次に (2) の問題であるが、ボラティリティ推定の文脈でよく知られているように (Hansen & Lunde (2006) など), 超高頻度金融データにはマルチンゲールによるモデル化では説明できない統計的性質が見られる。この問題を解消するアプローチとして (特にボラティリティ推定の分野で) 広く利用されているものに、マルチンゲールを潜在価格とみなして、観測データは潜在価格がある種のノイズに汚染された形で得られているとしてモデル化するというアプローチがある。ここでのノイズはマイクロストラクチャーノイズと呼ばれ、モデルに組み込むことができると望ましい。

本報告では、タイムラグにある種の制約を加えた下で、HRY モデルを拡張して上述の問題点を解消したモデルを提案する。更に、提案するモデルの下で、リード・ラグ現象の有無に関する仮説検定と、タイムラグの時間的均一性に関する仮説検定のための方法が構成できることを示す。最後に、提案手法が実際に機能するか検証するために、簡単な実証研究を行う。具体的には、IBM の気配値データを用いて、複数取引所間でのリード・ラグ現象の性質について調べる。

## 参考文献

- Alsayed, H. & McGroarty, F. (2014). Ultra-high-frequency algorithmic arbitrage across international index futures. *J. Forecast.* **33**, 391–408.
- Bacry, E., Delattre, S., Hoffmann, M. & Muzy, J. (2013). Modelling microstructure noise with mutually exciting point processes. *Quant. Finance* **13**, 65–77.
- Da Fonseca, J. & Zaatour, R. (2015). Correlation and lead-lag relationships in a Hawkes microstructure model. Working paper, Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2506845>.
- de Jong, F., Mahieu, R. & Schotman, P. (1998). Price discovery in the foreign exchange market: an empirical analysis of the yen/dmark rate. *Journal of International Money and Finance* **17**, 5–27.
- de Jong, F. & Nijman, T. (1997). High frequency analysis of lead-lag relationships between financial markets. *Journal of Empirical Finance* **4**, 259–277.
- Hansen, P. R. & Lunde, A. (2006). Realized variance and market microstructure noise. *J. Bus. Econom. Statist.* **24**, 127–161.
- Hasbrouck, J. (1995). One security, many markets: Determining the contributions to price discovery. *The Journal of Finance* **50**, 1175–1199.
- Hoffmann, M., Rosenbaum, M. & Yoshida, N. (2013). Estimation of the lead-lag parameter from non-synchronous data. *Bernoulli* **19**, 426–461.
- Huth, N. (2012). *Some properties of the correlation between the high-frequency financial assets*. Ph.D. thesis, Ecole Centrale Paris.
- Kawaller, I. G., Koch, P. D. & Koch, T. W. (1987). The temporal price relationship between S&P 500 futures and the S&P 500 index. *Journal of Finance* **42**, 1309–1329.
- Lo, A. W. & MacKinlay, A. C. (1990). When are contrarian profits due to stock market overreaction? *Review of Financial Studies* **3**, 175–205.

- Robert, C. Y. & Rosenbaum, M. (2010). On the limiting spectral distribution of the covariance matrices of time-lagged processes. *J. Multivariate Anal.* **101**, 2434–2451.
- Tóth, B. & Kertész, J. (2006). Increasing market efficiency: Evolution of cross-correlations of stock returns. *Phys. A* **360**, 505–515.